UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 6
Abgabe: Dienstag, 3. Dezember 2019, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen, wobei

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Nullfolge* ist (d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert 0) und
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *beschränkte* Folge ist (d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass $|b_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt).

Zeigen Sie, dass dann $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2 ($4 \times 2{,}5$ Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)$$

Aufgabe 3 ($3 + 5 + 2$ Punkte $+ 5^*$ Zusatzpunkte)**.** Gegeben sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

(a) Bestätigen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz der Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung geeigneter Rechenregeln für Reihen, dass
$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

(c) Folgern Sie aus den Überlegungen in Aufgabenteil (b), dass gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{1}$$

(d)* Geben Sie mithilfe von Satz 7.18 (2) der Vorlesung einen weiteren Beweis für (1).

bitte wenden

Aufgabe 4 (2 + 4 + 2 + 2 Punkte)**.** In Aufgabe 4 (b) auf Blatt 5 haben wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ nachgewiesen, jedoch ohne den Wert S dieser Reihe zu bestimmen. Im Allgemeinen ist das ein ungleich schwierigeres Problem und oftmals sind keine exakten Werte bekannt. Bemerkenswerterweise kann man aber in diesem konkreten Fall zeigen (was Sie jedoch nicht tun müssen und wofür die bisherigen Werkzeuge der Vorlesung auch noch nicht ausreichen würden!), dass $S = \frac{\pi^2}{6}$ gilt.
Ziel dieser Aufgabe ist es, zumindest einen „nachweislich guten“ Näherungswert für S zu bestimmen. Dabei gehen wir wie folgt vor:

(a) Wie in Aufgabe 4 (b) auf Blatt 5 bezeichnen wir für $n \in \mathbb{N}$ mit $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Begründen Sie, warum für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

(b) Zeigen Sie ähnlich wie in Aufgabe 4 (b) auf Blatt 5, dass für alle $m \geq n+1$ gilt

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \overset{①}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)k} \overset{②}{=} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k(k+1)} \overset{③}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

Begründen Sie dazu jeden der Schritte ①, ② und ③.

(c) Führen Sie in (b) den Grenzübergang $m \to \infty$ durch und folgern Sie damit aus (a), dass gilt

$$0 \leq S - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

(d) Bestimmen Sie mithilfe von (d) eine Dezimalzahl, die S mit einem Fehler von höchstens $\frac{1}{10}$ annähert.