UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 7
Abgabe: Dienstag, 10. Dezember 2019, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}m+1$ die Abschätzung

$$\left| e^z - \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{2|z|^{m+1}}{(m+1)!} \tag{1}$$

gilt. Imitieren Sie dazu die Rechnung aus Bemerkung 7.24 der Vorlesung.

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 Punkte)**.** Die Fehlerabschätzung (1) aus Aufgabe 1 überträgt sich unmittelbar auf die trigonometrischen Funktionen sin und cos. Für den Kosinus erhält man beispielsweise (was Sie nicht zeigen müssen!), dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $|\varphi| < \frac{1}{2}m + 1$

$$\left| \cos(\varphi) - \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{2|\varphi|^{2m+2}}{(2m+2)!} \tag{2}$$

gilt. Demnach können Näherungswerte für cos mithilfe der Partialsummen

$$S_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \longmapsto \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!},$$

für $m \in \mathbb{N}_0$ bestimmt werden. Dies wollen wir in dieser Aufgabe genauer untersuchen.

(a) Stellen Sie die Schaubilder von cos sowie der beiden Funktionen S_2 und S_3 über dem Intervall $[-4, 4]$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. Erstellen Sie dazu zunächst Wertetabellen mit der Schrittweite $0,5$.

(b) Bestimmen Sie mithilfe von (2) ein möglichst großes Intervall $I = (-a, a)$, sodass

$$|\cos(\varphi) - S_2(\varphi)| < 0,05 \qquad \text{für alle } \varphi \in I.$$

(c) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion S_2. Welche davon liegen in I?

bitte wenden

Aufgabe 3 (2 + 8 Punkte)**.** Bereits in Abschnitt 6.7 der Vorlesung haben wir die aus der Schule bekannten trigonometrischen Funktionen sin und cos mit der komplexen Exponentialfunktion in Verbindung gebracht. Dort haben wir gesehen, dass

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2}\big(e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}\big) \qquad \text{und} \qquad \sin(\varphi) = \mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}\big)$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt. Diese fundamentalen Zusammenhänge haben wir in Bemerkung 6.8 (2) ausgenutzt, um einen eleganten Beweis der *Additionstheoreme* für sin und cos zu geben, wobei wir (im Vorgriff auf Beispiel 7.23) die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*,

$$e^{z+w} = e^z e^w \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$

verwendet haben. In dieser Aufgabe wollen wir diese Überlegungen noch etwas vertiefen, indem wir einige weitere Identitäten der trigonometrischen Funktionen auf ähnliche Weise herleiten.

(a) Beweisen Sie die *Formel von de Moivre*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\big(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\big)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi).$$

(b) Beweisen Sie: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big), \\ \sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2\sin\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Wir definieren den *Kosinus hyperbolicus* cosh sowie den *Sinus hyperbolicus* sinh durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big) \qquad \text{bzw.} \qquad \sinh(x) := \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie (mit einer Rechnung wie für die trigonometrischen Funktionen cos und sin in Beispiel 7.23 der Vorlesung) die Reihenentwicklung von sinh und cosh.