UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 8
Abgabe: Dienstag, 17. Dezember 2019, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)**.** Für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} ax^2 - 1, & \text{für } x < 2 \\ 5 - 2x, & \text{für } x \geq 2 \end{cases}.$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen von f_a in den beiden Fällen $a = \frac{1}{4}$ und $a = 1$.

(b) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, für das die Funktion f_a auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist?

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte + 5* Zusatzpunkte)**.** (a) Es seien $I \neq \emptyset$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf I. Wir nehmen an, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass die Bedingung

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in I \tag{1}$$

erfüllt ist. Zeigen Sie, dass f auf I stetig ist.

Bemerkung: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingung (1) erfüllt, dann sagen wir „f ist *Lipschitz-stetig*“ und nennen L eine *Lipschitz-Konstante* von f.

(b) Weisen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a) die Stetigkeit der Wurzelfunktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$

auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$ nach. Zeigen Sie dazu, dass die Einschränkung von f auf jedes Intervall der Form (ε, ∞) mit beliebigem $\varepsilon > 0$ die Bedingung

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in (\varepsilon, \infty)$$

erfüllt, d.h. gilt (1) mit $I = (\varepsilon, \infty)$ und $L = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$.

Tipp: Für $x, y \geq 0$ gilt $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$.

(c)* Ist f auch bei $x = 0$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

bitte wenden

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte). (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(0) = 1$. Ferner sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen 2 konvergiert. Begründen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{4+a_n^2}\, f\left(\frac{a_n^2 - 5a_n + 6}{1+2a_n^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

(b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n\big(\sqrt{1+n^2} - n\big).$$

Tipp: Nutzen Sie erneut aus, dass $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$ für beliebige $x, y \geq 0$ gilt, und verwenden Sie anschließend das Resultat aus Aufgabe 2 (b).

Aufgabe 4 (2 + 8 Punkte). (a) Stellen Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 4 - x^2 \\ g:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^x \end{aligned}$$

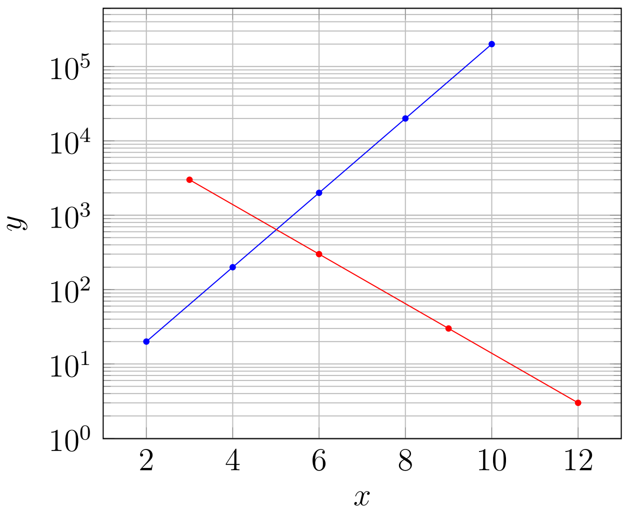
in einem gemeinsamen Koordinatensystem über dem Intervall $[-2, 3]$ dar.

(b) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes (Satz 8.6 der Vorlesung), dass die Gleichung

$$4 - x^2 = e^x$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mindestens zwei verschiedene Lösungen besitzt.

Zusatzaufgabe* (10* Zusatzpunkte). Um Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, die Werte sehr unterschiedlicher Größenordnungen in $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ annehmen, graphisch darzustellen, bietet sich die Verwendung eines *halblogarithmisches Diagramms* an; in einem solchen Koordinatensystem ist die y-Achse *logarithmisch skaliert*, während die x-Achse unskaliert bleibt.
Nachfolgend sind in einem solchen halblogarithmischen Diagramm die Wertepaare von zwei Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (blau) und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (rot) eingetragen.



Bestimmen Sie passende Funktionsgleichungen für f_1 und f_2.