UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

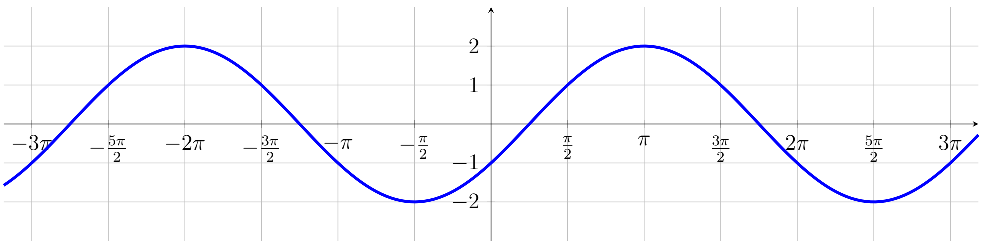
Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 9
Abgabe: Dienstag, 7. Januar 2020, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)**.** (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right).$$

(b) Nachfolgend ist der Graph einer periodischen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dargestellt. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für g.



Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)**.** Wir betrachten das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

(a) Bestätigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass $x = 1$ eine Nullstelle von p ist. Bestimmen Sie anschließend mittels Polynomdivision ein Polynom q, für das

$$p(x) = (x-1)\cdot q(x)$$

gilt. Ermitteln Sie damit die übrigen Nullstellen von p.

(b) Bestimmen Sie mittels Polynomdivision Polynome a und b, für die gilt

$$p(x) = (x^2-1)\cdot a(x) + b(x).$$

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte)**.** Bestimmen Sie Partialbruchzerlegungen für die beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x-2} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2x^2}.$$

bitte wenden

Aufgabe 4 (2 + 8 Punkte). (a) Stellen Sie die beiden Funktionen

$$f:\ [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^{-x} \qquad \text{und} \qquad g:\ [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin(x)$$

in einem gemeinsamen Koordinatensystem über dem Intervall $[0, 4\pi]$ dar.

(b) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Gleichung

$$e^{-x} = \sin(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

auf jedem der Intervalle $I_k := (2(k-1)\pi, (2k-1)\pi)$ für $k \in \mathbb{N}$ mindestens zwei Lösungen besitzt.

Zusatzaufgabe* (5 + 5 Punkte). Der Zerfall radioaktiver Nuklide lässt sich durch Exponentialfunktionen beschreiben. Gibt $m(t)$ die Masse der Substanz zum Zeitpunkt t an, dann gilt $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, wobei $m_0 = m(0)$ die Masse zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\lambda > 0$ die *Zerfallskonstante* der Substanz bezeichnen.

(a) Unter der *Halbwertszeit* $T_{1/2}$ versteht man die Zeitspanne, in der die Hälfte der anfänglichen Masse m_0 zerfallen ist. Zeigen Sie, dass gilt $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$.

(b) Das radioaktive Isotop ^{239}Pu hat eine Halbwertszeit von 24110 Jahren. Wie lange dauert es, bis von einer Probe der Masse 2 g weniger als 0, 01 g übrig ist?

Zusatzaufgabe* (3 + 7 Punkte). Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen betrachten wir die zugehörige *Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wir nehmen an, dass es ein $r_0 > 0$ gibt, sodass die Bedingung $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

(a) Bestätigen Sie mithilfe des Wurzelkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r_0$ absolut konvergiert.

(b) Nach Aufgabenteil (a) definiert die Potenzreihe auf $I_0 := (-r_0, r_0)$ eine Funktion $f : I_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Zeigen Sie, dass f auf jedem Intervall der Form $I = (-r, r)$ mit $0 < r < r_0$ Lipschitz-stetig ist.

Hinweis: Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass

$$x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2) \sum_{k=1}^{n} x_1^{k-1} x_2^{n-k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte). Wir betrachten die beiden Polynome

$$p(x) := x^{2020} - 31x^{2019} - 12 \qquad \text{und} \qquad q(x) := x^2 - 1.$$

Welchen Rest lässt p bei der Division mit q?

Tipp: Lassen Sie sich von Aufgabe 2 (b) inspirieren.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2020!