UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 9
Lösungshinweise zu den Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe* (5 + 5 Punkte)**.** Der Zerfall radioaktiver Nuklide lässt sich durch Exponentialfunktionen beschreiben. Gibt $m(t)$ die Masse der Substanz zum Zeitpunkt t an, dann gilt $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, wobei $m_0 = m(0)$ die Masse zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\lambda > 0$ die *Zerfallskonstante* der Substanz bezeichnen.

(a) Unter der *Halbwertszeit* $T_{1/2}$ versteht man die Zeitspanne, in der die Hälfte der anfänglichen Masse m_0 zerfallen ist. Zeigen Sie, dass gilt $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$.

Lösung. Gemäß der Definition der Halbwertszeit gilt $m(T_{1/2}) = \frac{1}{2}m(0)$. Einsetzen von $t = T_{1/2}$ in die Funktionsgleichung $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ liefert somit

$$\frac{1}{2}m_0 = m(T_{1/2}) = m_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Da wir an trivialen Fällen nicht interessiert sind, dürfen wir $m_0 \neq 0$ annehmen, sodass wir aus der letzten Gleichung $\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$ folgern können. Durch Anwenden von ln erhalten wir $-\ln(2) = -\lambda T_{1/2}$, woraus sich nach Division durch $-T_{1/2}$ (man beachte, dass $T_{1/2} > 0$ gilt) schließlich die behauptete Formel $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$ ergibt.

(b) Das radioaktive Isotop ^{239}Pu hat eine Halbwertszeit von 24110 Jahren. Wie lange dauert es, bis von einer Probe der Masse 2 g weniger als 0,01 g übrig ist?

Lösung. Wir verwenden die Formel aus Aufgabenteil (a), um die Zerfallskonstante λ von ^{239}Pu zu bestimmen; mit der angegebenen Halbwertszeit $T_{1/2} = 24110\,\mathrm{a}$ erhalten wir den Wert $\lambda \approx 2,87 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{a}^{-1}$. Mithilfe des Zerfallsgesetzes $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ für die anfängliche Masse $m_0 = 2\,\mathrm{g}$ können wir somit den Zeitpunkt t_1 bestimmen, zu dem noch $m_1 = 0,01\,\mathrm{g}$ der Substanz übrig ist; der Ansatz $m_1 = m(t_1) = m_0 e^{-\lambda t_1}$ liefert $t_1 = \lambda^{-1}\ln(\frac{m_0}{m_1}) \approx 1,84 \cdot 10^5\,\mathrm{a}$. Ab diesem Zeitpunkt ist von der Probe weniger als $0,01\,\mathrm{g}$ übrig.

Zusatzaufgabe* (3 + 7 Punkte)**.** Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen betrachten wir die zugehörige *Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wir nehmen an, dass es ein $r_0 > 0$ gibt, sodass die Bedingung $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

(a) Bestätigen Sie mithilfe des Wurzelkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r_0$ absolut konvergiert.

Lösung. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r_0$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| \leq \frac{1}{r_0}|x| < 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Das Wurzelkriterium liefert damit die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(b) Nach Aufgabenteil (a) definiert die Potenzreihe auf $I_0 := (-r_0, r_0)$ eine Funktion $f : I_0 \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Zeigen Sie, dass f auf jedem Intervall der Form $I = (-r, r)$ mit $0 < r < r_0$ Lipschitz-stetig ist.

Hinweis: Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass

$$x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2) \sum_{k=1}^{n} x_1^{k-1} x_2^{n-k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösung. Es seien $x_1, x_2 \in I$ gegeben.

Zunächst folgern wir mithilfe der Dreiecksungleichung aus der im Hinweis gegebenen Formel, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_1^n - x_2^n| \leq |x_1 - x_2| \sum_{k=1}^{n} |x_1|^{k-1}|x_2|^{n-k} \leq |x_1 - x_2| \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} r^{n-k} = n r^{n-1}|x_1 - x_2| \quad (1)$$

gilt. Weiter setzen wir x_1 und x_2 in die definierende Potenzreihe der Funktion f ein, womit wir

$$f(x_1) - f(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_1^n - x_2^n) \quad (2)$$

erhalten; man beachte, dass die Reihe auf der rechten Seite nun bei $n = 1$ statt bei $n = 0$ startet, weil sich der gemeinsame konstante Term a_0 der beiden Reihen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ in der Differenz weghebt.

Wir wenden nun die Dreiecksungleichung (für absolut konvergente Reihen) auf (2) an; damit ergibt sich unter Verwendung von (1) sowie der nach Voraussetzung geltenden Abschätzung $|a_n| \leq \frac{1}{r_0^n}$, dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x_1^n - x_2^n| \leq |x_1 - x_2| \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}.$$

Wir haben also $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_r|x_1 - x_2|$, wobei L_r gegeben ist durch

$$L_r := \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{(1 - \frac{r}{r_0})^2} = \frac{r_0}{(r - r_0)^2}.$$

Wir fassen zusammen: Für jedes $0 < r < r_0$ ist f auf $I = (-r, r)$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten L_r, d.h. es gilt $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_r|x_1 - x_2|$ für alle $x_1, x_2 \in I$. Insbesondere ist f auf ganz I_0 stetig (wenn auch nicht notwendigerweise Lipschitz-stetig, da $L_r \to \infty$ für $r \to r_0$).

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Wir betrachten die beiden Polynome

$$p(x) := x^{2020} - 31x^{2019} - 12 \qquad \text{und} \qquad q(x) := x^2 - 1.$$

Welchen Rest lässt p bei der Division mit q?

Tipp: Lassen Sie sich von Aufgabe 2 (b) inspirieren.

Lösung. Allgemein gilt: Ist q ein Polynom vom Grad n, dann lässt jedes beliebige Polynom p bei Division mit q einen Rest vom Grad höchstens $n-1$. In unserem Fall bedeutet das konkret, dass $p(x) = x^{2020} - 31x^{2019} - 12$ bei Division mit $q(x) = x^2 - 1$ einen Rest vom Grad höchstens 1 lässt; wir können also schreiben

$$p(x) = a(x)q(x) + b(x) \qquad \text{mit} \qquad b(x) = b_1 x + b_0. \tag{3}$$

Zu Bestimmung von a und b könnten wir natürlich wie gewohnt Polynomdivision verwenden. Im Anbetracht des hohen Grades von p, ist dies jedoch ein wenig praktikabler Ansatz. Da wir (dem Aufgabensteller sei Dank) nur am Rest b und nicht an a interessiert sind (für die Bestimmung von a würde tatsächlich kein Weg an der Polynomdivision oder einem ähnlich aufwendigen Verfahren vorbeiführen), können wir stattdessen die folgende Beobachtung ausnutzen: Setzen wir die beiden Nullstellen von q, nämlich ± 1, in die Identität (3) ein, so erhalten wir

$$p(\pm 1) = a(\pm 1)\underbrace{q(\pm 1)}_{=0} + b(\pm 1) = b(\pm 1).$$

Die Werte von p an den beiden Stellen -1 und 1 lassen sich direkt berechnen; es ergibt sich $p(-1) = 20$ und $p(1) = -42$. Wir kennen damit also bereits zwei Funktionswerte von b, und weil b ein Polynom vom Grad höchstens 1 ist, ist b hierdurch eindeutig bestimmt. Das ist der ganze Trick. In der Tat können wir damit

$$b_1 = \frac{(-42) - 20}{1 - (-1)} = -31 \qquad \text{und} \qquad b_0 = -42 - (-31) \cdot 1 = -11,$$

berechnen. Somit lässt p bei Division mit q den Rest $b(x) = -31x - 11$.