**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

**Übungen zur Vorlesung**
**Mathematik für Naturwissenschaftler I**
Wintersemester 2019/2020

**Blatt 10**
**Abgabe:** Dienstag, 14. Januar 2020, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

---

**Aufgabe 1** (2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte)**.** Geben Sie an, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und bestimmen Sie dort die Ableitungen. Begründen Sie Ihre Antworten. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass $(x^n)' = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7x + 9$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \left(x^3 - x + 1\right)^{20}$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |3x - 2|$

**Aufgabe 2** ($3 \times 5$ = 15 Punkte)**.** In dieser Aufgabe wollen wir die Details zum Beweis der Quotientenregel (siehe (iii) in Satz 11.4 der Vorlesung) ausarbeiten.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0, x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0}}{x_n - x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Folgern Sie daraus, dass die Funktion

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

differenzierbar ist, und geben Sie ihre Ableitung an.

(b) Es sei $g : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $g$ an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar ist und dass $g(x_0) \neq 0$ gilt. Folgern Sie mithilfe von Aufgabenteil (a) aus der Kettenregel (siehe Satz 11.5), dass die Funktion $\frac{1}{g}$ an der Stelle $x_0$ differenzierbar ist mit

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

*bitte wenden*

(c) Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $f$ und $g$ beide an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar sind und dass $g(x_0) \neq 0$ gilt. Folgern Sie mithilfe von Aufgabenteil (b) aus der Produktregel (siehe (ii) in Satz 11.4), dass die Funktion $\frac{f}{g}$ an der Stelle $x_0$ differenzierbar ist mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

**Aufgabe 3** (5 Punkte)**.** Weisen Sie die Differenzierbarkeit der Wurzelfunktion

$$f : \ (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$

nach und bestimmen Sie ihre Ableitung.

**Tipp:** Verwenden Sie den gleichen „Trick" wie in Aufgabe 2 (b) auf Blatt 8.

**Aufgabe 4** ($5 + 5 = 10$ Punkte)**.** (a) Es seien reelle Zahlen $k, c > 0$ gegeben. Wir betrachten die Funktion

$$f : \ [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{kx + c}.$$

Bestätigen Sie, dass $f$ differenzierbar ist und dass die Ableitung $f'$ die Bedingung

$$f'(x) = -kf(x)^2 \qquad \text{für alle } x \in [0, \infty) \tag{1}$$

erfüllt. Wir sagen auch, $f$ ist eine Lösung der *Differentialgleichung* (1).

(b) Bestimmen Sie eine Lösung $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f'(x) = -f(x)^2 \qquad \text{für alle } x \in [0, \infty),$$

die die *Anfangswertbedingung* $f(0) = 2$ erfüllt. Skizzieren Sie den Graphen von $f$.

**Zusatzaufgabe*** ($3 \times 5 = 15$ Punkte)**.** Auf ein neu eingerichtetes Konto zahlen Sie jedes Jahr zum 1. Januar einen festen Betrag $r > 0$ ein; der Kontostand wird zum 31. Dezember eines jeden Jahres mit dem gleichen Zinsfaktor $q > 1$ verzinst. Es bezeichne $K_n$ den Kontostand am 1. Januar des $n$-ten Jahres; beispielsweise gilt $K_1 = r$ und $K_2 = r + rq$.

(a) Begründen Sie, dass $K_{n+1} = qK_n + r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass gilt

$$K_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Im wievielten Jahr wird der Kontostand bei einer jährlichen Einzahlung von 250 EUR sowie einem Zinssatz von 0,05 % erstmals auf über 10000 EUR angewachsen sein?