UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 11
Abgabe: Dienstag, **28. Januar 2020 (!)**, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Der Abgabetermin für dieses Übungsblatt ist Dienstag, der 28. Januar 2020. Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie also ausnahmsweise zwei Wochen Zeit. Das nächste (und letzte) Blatt 12 erhalten Sie dementsprechend auch erst am Dienstag, dem 28. Januar 2020.

Aufgabe 1 (3 + 4 + 3 Punkte)**.** In Aufgabe 4 auf Blatt 7 haben wir die hyperbolischen Funktionen cosh und sinh eingeführt. In dieser Aufgabe wollen wir uns nun einigen Eigenschaften dieser speziellen Funktionen widmen; man beachte, dass für die trigonometrischen Funktionen jeweils sehr ähnliche Regeln gelten. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$.

(c) Es gilt $\cosh'(x) = \sinh(x)$ und $\sinh'(x) = \cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Gegeben seien reelle Zahlen $\varepsilon, \sigma > 0$. Diskutieren Sie die Funktion

$$V: \ (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r \longmapsto 4\varepsilon\Big(\Big(\frac{\sigma}{r}\Big)^{12} - \Big(\frac{\sigma}{r}\Big)^{6}\Big),$$

d.h., bestimmen Sie (in Abhängigkeit von ε und σ) die Nullstellen sowie die Extrem- und Wendepunkte von V, die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} V(x)$ und $\lim_{x\to\infty} V(x)$, sowie die Monotonie- und Krümmungsintervalle.
Skizzieren Sie anschließend den Graphen von V im Spezialfall $\varepsilon = \sigma = 1$.

Bemerkung: V ist das sogenannte *Lennard-Jones-Potential*. Dieses beschreibt näherungsweise die Energie $V(r)$ bei der Wechselwirkung zwischen zwei ungeladenen und chemisch nicht aneinander gebundenen Atomen im Abstand r voneinander.

bitte wenden

Aufgabe 3 (3 + 3 + 4 Punkte)**.** Bestimmen Sie mithilfe der Regel von L'Hospital die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Gegeben sei die Funktion

$$f:\ (-\infty,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{1-x}.$$

Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt 0.

Hinweis: Der zur Bearbeitung dieser Aufgabe benötigte Stoff wird erst nächste Woche in der Vorlesung behandelt.

Zusatzaufgabe* (5 + 5 Punkte)**.** Für eine reelle Zahl $a > 0$ betrachten wir die Funktion

$$f_a:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 - 2, & \text{falls } x < 2 \\ -ax^2 + 4x + (4a-6), & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}.$$

(a) Begründen Sie, dass f_a für jede Wahl von $a > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Funktion f_a auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, und skizzieren Sie anschließend den Graphen von f_a für diesen speziellen Wert von a.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Einem Kreis mit Radius $r > 0$ soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Bestimmen Sie die Kantenlängen dieses Rechtecks.

Anmeldung zur Klausur

Um an der Klausur am Mittwoch, dem 12. Februar 2020, teilnehmen zu können, ist eine Anmeldung zwingend erforderlich – wenn Sie nicht angemeldet sind, dürfen Sie auch nicht mitschreiben. Die Anmeldung ist nur bis eine Woche vor dem Termin möglich. Abmeldungen sind ebenfalls nur bis eine Woche vor dem Klausurtermin möglich (danach nur nach Vorlage eines ärztlichen Attests). Wenn Sie zur Klausur angemeldet sind aber nicht erscheinen, wird die Klausur als nicht bestanden gewertet.
Die Anmeldung erfolgt grundsätzlich online über HISPOS (LSF). Uns ist bekannt, dass dies aus technischen Gründen für Studierende im ersten Fachsemester gegenwärtig nicht möglich ist. Betroffene Studierende bitten wir daher, sich direkt bei uns anzumelden, per E-Mail an Tobias Mai (`mai@math.uni-sb.de`); geben Sie dabei Ihren vollständigen Namen, Ihr Fachsemester, Ihren Studiengang sowie Ihre Matrikelnummer an. Die oben genannten Fristen gelten selbstverständlich auch in diesem Fall.
Sollten Sie nicht zur Klausur zugelassen werden, werden wir Sie bis spätestens Montag, den 10. Februar, per E-Mail darüber informieren. In diesem Fall wird Ihre Anmeldung von uns rückgängig gemacht.