**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

# Übungen zur Vorlesung
# Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2019/2020

## Blatt 12

**Abgabe:** Dienstag, 4. Februar 2020, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

---

*Dies ist das* ***letzte bewertete Übungsblatt****. Vergessen Sie nicht, sich* ***rechtzeitig zur Klausur anzumelden****; beachten Sie dazu bitte auch die* ***Informationen auf Übungsblatt 11****.*

**Aufgabe 1** (5 + 5 Punkte)**.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin(x)e^{-x}.$$

(a) Bestimmen Sie das fünfte Taylorpolynom von $f$ im Punkt 0.

(b) Bestätigen Sie mithilfe der Lagrange-Restglieddarstellung aus Satz 12.11 der Vorlesung, dass das in (a) bestimmte Taylorpolynom die Funktion $f$ auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ bis auf einen Fehler von höchstens 0,17 approximiert.

**Aufgabe 2** (2 + 2 + 3 + 3 Punkte)**.** Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int (x^5 - 4x^3 + e^{-2x})\, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\, \mathrm{d}x, \qquad \int x\sin(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int x^2 e^x\, \mathrm{d}x.$$

**Aufgabe 3** (4 + 6 Punkte)**.** In Abschnitt 13.6 der Vorlesung haben wir gesehen, dass das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \arctan(x) \tag{1}$$

eine wichtige Rolle bei der Integration rationaler Funktionen spielt. Ziel dieser Aufgabe ist es, diese Formel zu bestätigen.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Tangensfunktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(b) In Abschnitt 9.6 der Vorlesung wurde der Arkustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ als die Umkehrfunktion zu $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ eingeführt. Bestimmen Sie mithilfe von Satz 11.9 der Vorlesung die Ableitung von arctan und bestätigen Sie damit die Gültigkeit von (1).

***bitte wenden***

**Aufgabe 4** (5 + 5 Punkte)**.** Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

(a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $f$.

**Tipp:** Wählen Sie den Ansatz $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$.

(b) Berechnen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von $f$.

**Tipp:** Behandeln Sie die beiden Intervalle $(-\infty,-1)$ und $(-1,\infty)$ getrennt.

---

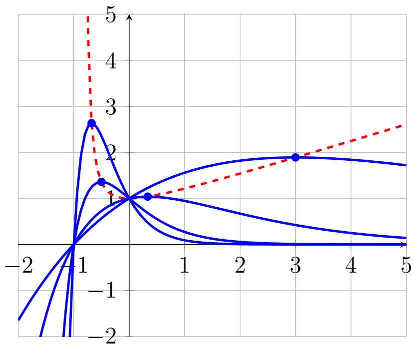
**Zusatzaufgabe*** (3 + 3 + 4 Punkte)**.** Wir betrachten die Funktionenschar

$$f_a:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x+1)e^{-ax} \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f_a$ an der Stelle $x_0 = \frac{1}{a} - 1$ ein globales Maximum hat, und bestimmen Sie dessen Wert in Abhängigkeit von $a$.

(b) Für welchen Wert $a > 0$ ist das Maximum der Funktion $f_a$ im Vergleich zu allen anderen Funktionen der Schar am kleinsten?

(c) In der Grafik rechts sind die Graphen von $f_a$ sowie ihre Hochpunkte für verschiedene Werte von $a$ dargestellt. Die Hochpunke liegen alle auf dem Graphen einer Funktion $H : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $H$.




**Zusatzaufgabe*** (10 Punkte)**.** Gegeben sei ein $\alpha > 0$. Weiter sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung

$$f'(x) = -\alpha f(x)^2 \qquad \text{für alle } x \in [0,\infty)$$

löst und die Anfangswertbedingung $f(0) = 1$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $f(x) = \frac{1}{\alpha x+1}$ für alle $x \in [0,\infty)$ gelten muss.

**Tipp:** Betrachten Sie die Hilfsfunktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{f(x)} - \alpha x$. Begründen Sie, warum $g$ differenzierbar ist, und rechnen Sie nach, dass $g'(x) = 0$ für alle $x \in [0,\infty)$ gilt. Somit ist $g$ konstant.

**Zusatzaufgabe*** (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\ln(n)} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)!}{(3n)!}$$

auf Konvergenz. In welchen Fällen liegt sogar absolute Konvergenz vor?

**Zusatzaufgabe*** (10 Punkte)**.** Berechnen Sie die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$