10. Polynome und rationale Funktionen: Linearfaktorzerlegung und Partialbruchzerlegung

10.1. Bemerkung: Sei

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

ein Polynom vom Grad $n > 0$, d.h. $a_n \neq 0$. Dann sagt der Fundamentalsatz der Algebra (vgl. 6.6.), dass es mindestens eine komplexe Nullstelle z_1 von p gibt, d.h. ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_1) = 0$. Dies bedeutet dann, dass wir in $p(x)$ einen Faktor $(x - z_1)$ abspalten können, und p schreiben können als

$$p(x) = (x - z_1) \cdot q(x)$$

wobei $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Dies sieht man folgendermaßen:

$$p(x) = p(x) - \underbrace{p(z_1)}_{=0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k z_1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{(x^k - z_1^k)}$$

$$= (x - z_1)(x^{k-1} + x^{k-2} \cdot z_1 +$$

$$+ x^{k-3} \cdot z_1^2 + \ldots + x z_1^{k-2} + z_1^{k-1})$$

$$\text{z.B.}: x^2 - z_1^2 = (x - z_1)(x + z_1)$$

$$x^3 - z_1^3 = (x - z_1)(x^2 + x z_1 + z_1^2)$$

etc. –

$$= (x - z) \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$$

Durch Iteration der Abspaltung kann man dann jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen.

10.2. Satz: Jedes Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C})$$

mit $a_n \neq 0$ hat die Gestalt

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

mit geeigneten $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Die $z_1, \dots, z_n$ sind dann genau die Nullstellen von p.

10.3 Bemerkung: Über $\mathbb{C}$ können wir also jedes Polynom in lineare Faktoren zerlegen. Dies gilt dann natürlich auch für reelle Polynome (d.h. solche mit $a_k \in \mathbb{R}$), allerdings können auch dort die Nullstellen im allgemeinen komplex sein; z. B.

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

hat als Nullstellen $z_1 = i$ und $z_2 = -i$. Nach Aufgabe 4, Blatt 4 wissen wir aber, dass solche nicht-reelle Nullstellen immer in konjugierten Paaren auftreten.

d.h. mit z_1 ist auch $\bar{z}_1$ Nullstelle.

Dann haben wir in $p(x)$ aber den Faktor

$$(x-z_1)(x-\bar{z}_1) = x^2 - (\underbrace{z_1+\bar{z}_1}_{\substack{2\cdot \operatorname{Re} z_1 \\ \in \mathbb{R}}})x + \underbrace{z_1\bar{z}_1}_{|z_1|^2 \in \mathbb{R}}$$

Über $\mathbb{R}$ haben wir also immer eine Zerlegung in lineare und quadratische Faktoren.

<u>10.4 Beispiele</u>: 1) $p(x) = x^3 + x^2 - 2x$

hat als Nullstelle $x_1 = 0$, somit ist

$$p(x) = x(x^2 + x - 2)$$

$x^2 + x - 2$ hat als Nullstelle $x_2 = 1$,

somit ist

$$x^2 + x - 2 = (x-1)\cdot q(x)$$

$q(x)$ bestimmen wir durch Polynomdivision:

$$q(x) = (x^2 + x - 2) : (x-1) = x + 2$$
$$\begin{array}{r} x^2 - x \\ \hline 2x - 2 \\ 2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

also:

$$x^3 + x^2 - 2x = (x-0)(x-1)(x+2)$$

mit den drei Nullstellen $0, 1, -2$.

2) Betrachte $p(x) = x^4 - 1$.

Dies hat die vier Nullstellen

$1, -1, i, -i$

zerfällt über $\mathbb{C}$ also als

$$p(x) = (x-1)(x+1)\underbrace{(x-i)(x+i)}_{(x^2+1)} ;$$

über $\mathbb{R}$ haben wir

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

10.5 Partialbruchzerlegung: 1) Allgemeine rationale Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$ können durch Polynomdivision auf die Fälle reduziert werden, wo der

Grad von p < Grad von q ist.

Betrachte z. B.

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$$

Dann ist

$$
\begin{array}{l}
x^4 + 2x^3 + x^2 - 5 : (x^2 + x + 1) = x^2 + x - 1 \\
\underline{x^4 + x^3 + x^2} \\
\quad x^3 \qquad - 5 \\
\quad \underline{x^3 + x^2 + x} \\
\quad -x^2 - x - 5 \\
\quad \underline{-x^2 - x - 1} \\
\qquad\quad -4
\end{array}
$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + x - 1 + \frac{-4}{x^2 - x + 1}$$

2) $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$

kann man gemäß der Linearzerlegung des Nenners

$$q(x) = a_n (x - z_1)^{n_1} \dots (x - z_k)^{n_k}$$

als Summe schreiben

$$f(x) = \frac{a_{11}}{(x - z_1)} + \frac{a_{12}}{(x - z_1)^2} + \dots + \frac{a_{1n_1}}{(x - z_1)^{n_1}}$$

$$+ \dots -$$

$$+ \frac{a_{k1}}{(x - z_k)} + \frac{a_{k2}}{(x - z_k)^2} + \dots + \frac{a_{kn_k}}{(x - z_k)^{n_k}}$$

für geeignete $a_{ij} \in \mathbb{C}$

Für reelle Polynome treten die Nullstellen und die Koeffizienten in konjugierten Paaren auf, die man zusammenfassen kann.

10.6. Beispiele: 1) Betrachte

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+x}$$

es gilt $x^3+x = x(x^2+1)$

$$= x(x-i)(x+i)$$

Somit setzen wir

$$\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i}$$

und bestimmen A, B, C durch Koeffizientenvergleich:

$$x^2-1 = A(x-i)(x+i) + Bx(x+i) + Cx(x-i)$$

$$= A(x^2+1) + B(x^2+ix) + C(x^2-ix)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A+B+C \quad \Rightarrow \quad B = C = 1$$

$$0 = iB - iC \quad \Rightarrow \quad B = C$$

$$-1 = +A \quad \Rightarrow \quad A = -1$$

also haben wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{-1}{x} + \underbrace{\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}}_{\frac{x+i+x-i}{(x-i)(x+i)} = \frac{2x}{x^2+1}} \quad \text{in } \mathbb{C}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

3) Für

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$$

wir setzen an

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleich

$A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$

also

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}$$

10.6. "Anwendung": Die Fibonacci-Zahlen und ihre Potenzreihe: Wir definieren die Folge der Fibonacci-Zahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

also:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Konvergenz ist hier nicht die Frage (klarerweise: $f_n \to \infty$), sondern ob wir eine konkrete Formel für f_n finden können.

Dazu kodieren wir die f_n durch eine "formale" Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \ldots$$

("formal" heißt: wir ignorieren die Frage nach der Konvergenz)

Dann haben wir

$$
\begin{aligned}
F(x) &= f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \dots \\
x F(x) &= \phantom{f_1 x + {}} f_1 x^2 + f_2 x^3 + f_3 x^4 + \dots \\
x^2 F(x) &= \phantom{f_1 x + f_2 x^2 + {}} f_1 x^3 + f_2 x^4 + \dots
\end{aligned}
$$

$$F(x) - xF(x) - x^2 F(x) = f_1 x + \underbrace{(f_2 - f_1)}_{=0} x^2 + \underbrace{(f_3 - f_2 - f_1)}_{=0} x^3 + \dots$$

$$= f_1 x$$

$$= x$$

also $$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

$1 - x - x^2$ hat die zwei Nullstellen

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

und wir können F schreiben als

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{v_+ - v_-} \left(\frac{1}{1 - x v_+} - \frac{1}{1 - x v_-} \right)$$

wobei $v_\pm$ die Inverse der Nullstellen sind: $$v_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Entwickeln wir $\frac{1}{1-x r_\pm}$ als geometrische Reihe, so haben wir

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-r_+x} - \frac{1}{1-r_-x}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(r_+x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(r_-x)^n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_+^n - r_-^n}{\sqrt{5}} \cdot x^n$$

$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

somit:

$$f_n = \frac{r_+^n - r_-^n}{\sqrt{5}}$$

Beispiele: $f_0 = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$

$$f_1 = \frac{r_+ - r_-}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$f_2 = \frac{r_+^2 - r_-^2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}\left[1 + 2\sqrt{5} + 5 - (1 - 2\sqrt{5} + 5)\right]$$

$$= 1 \qquad \text{etc}$$

Beachte: $r_+ \simeq 1.618..$

$r_- \simeq -0.618..$

d.h. $r_-^n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$

d.h. $f_n \approx \frac{r_+^n}{\sqrt{5}}$ für großes n

Es gilt sogar immer: $\frac{|r_-^n|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ für allen

und somit ist

f_n = die natürliche Zahl am nächsten zu $\frac{r_+^n}{\sqrt{5}}$

n	$\frac{r_+^n}{\sqrt{5}}$	f_n
1	0.72	1
2	1.17	1
5	4.96	5
10	55.003	55
20	6765.00..	6765