# 11. Ableitungen von Funktionen

## 11.1. Motivation: 1) Stetigkeit einer

Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ bedeutet:

$$f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0) \quad \text{für } \Delta x \to 0$$

Differenzierbarkeit von $f$ an der Stelle $x_0$ verschärft dies zu der Aussage, dass $f$ in der Nähe von $x_0$ durch eine lineare Funktion approximiert werden kann:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\substack{\text{Ableitung von } f \\ \text{an der Stelle } x_0}} \cdot \Delta x$$

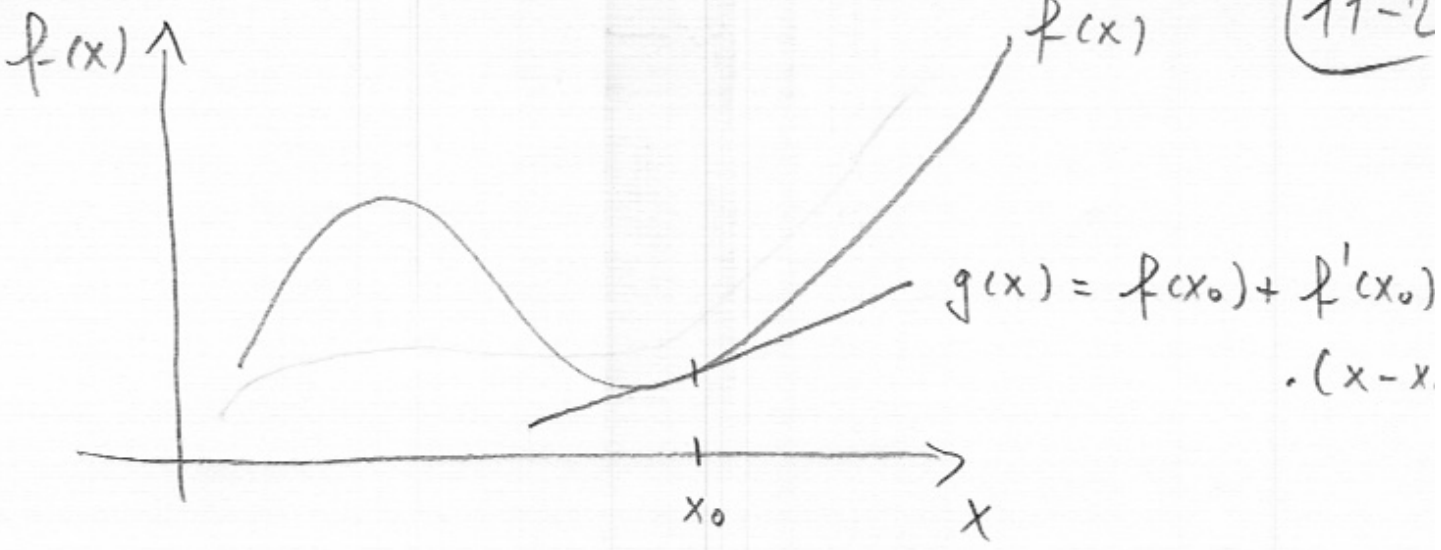
$f'(x_0)$ sollte also sein

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

oder präziser

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

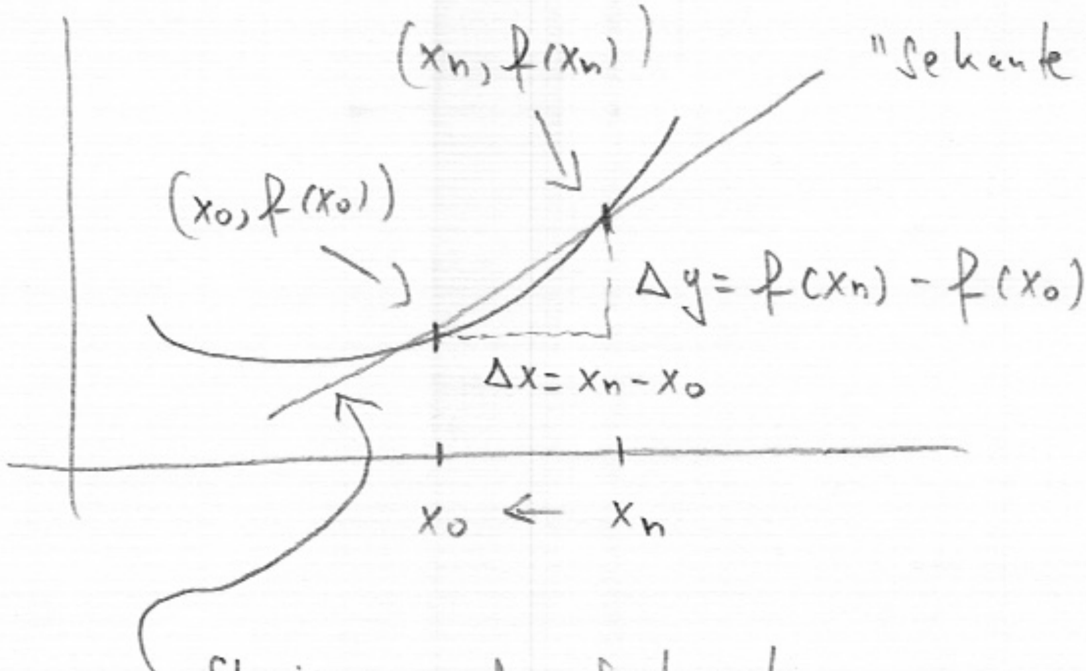
für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$




- $g$ ist die Tangente an $f$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$
- $g(x) \approx f(x)$ in der Nähe von $x_0$

[wir sollten schon gelernt haben, dass diese Aussage später präzisiert werden muss mit einer quantitativen Abschätzung für den Fehler $|f(x) - g(x)|$, andernfalls ist die Aussage $g(x) \approx f(x)$ ziemlich nutzlos!]

- Steigung $f'(x_0)$ der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist Grenzwert der Steigungen der Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_n, f(x_n))$ :




Steigung der Sekante =

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

2) Wozu sind Ableitungen gut?

i) $f'(x_0)$ beschreibt Änderung der Funktion im Punkt $x_0$ und spezielle wichtige Punkte und Eigenschaften von $f$ (wie Extrempunkte, Monotonie etc.) können durch Eigenschaften der Ableitung charakterisiert und berechnet werden.

Dies ist die Grundlage der allseitig beliebten Kurvendiskussion.

ii) Naturwissenschaftliche Gesetze beschreiben meist Änderungen von Größen, sind also durch Differentialgleichungen gegeben, welche die Ableitungen von Funktionen enthalten.

Beispiel: $y(t) \hat{=}$ Ort y in Abhängigkeit von Zeit t

Dann ist

$v(t) = y'(t) \hat{=}$ Geschwindigkeit zur Zeit t

$a(t) = y''(t) \hat{=}$ Beschleunigung — " —

2 Newtonsche Gesetz: $F = m \cdot a$

Kraft  Beschleunigung

Newton (1642–1726) hat die Differentialrechnung entwickelt zur Beschreibung und Behandlung seiner physikalischen Theorien.

(Unabhängig (?) von Newton wurde die Differentialrechnung von Leibniz (1646–1716) entwickelt.)

[Galileo: "Das Buch der Natur ist in der Sprache (1564–1642) der Mathematik geschrieben" ]

<u>11.2 Definition:</u> Betrachte eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subset \mathbb{R}$)

1) Sei $x_0 \in D$. Wir sagen, $f$ ist <u>in $x_0$ differentierbar</u>, falls der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ existiert. Der Grenzwert ist dann notwendigerweise für alle Folgen $(x_n)$ gleich und wir schreiben dann auch

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

dafür; den Wert des Grenzwertes bezeichnen wir mit

$$f'(x_0) := \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

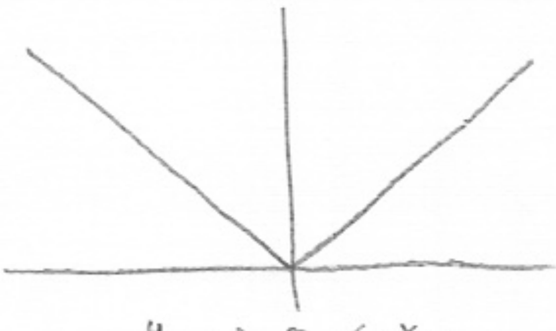
und nennen $f'(x_0)$ die <u>Ableitung</u> von $f$ in $x_0$.

2) $f: D \to \mathbb{R}$ ist <u>differentierbar</u>, falls es in allen $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Dann definiert

$$f': D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

eine neue Funktion, die <u>Ableitung</u> von $f$.

<u>11.3. Beispiele</u>: 1) Jede diff'bare Funktion ist notwendigerweise stetig, aber die Umkehrung gilt nicht allgemei[n]. Betrachte $f(x) = |x|$



$y_n \to 0 \leftarrow x_n$

$f$ ist bei $x_0 = 0$ stetig, aber nicht diff'bar, da für $x_n > 0$ mit $x_n \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{|x_n|}{x_n}}_{+1} = 1$$

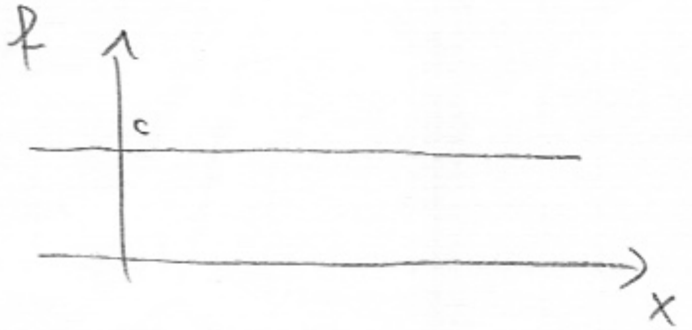
aber für $y_n < 0$ mit $y_n \to 0$ :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(0)}{y_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{|y_n|}{y_n}}_{=-1} = -1$$

Also existiert der Grenzwert nicht für alle Folgen (nimm z. B. die gemischte Folge $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$)
und $f(x) = |x|$ ist nicht bei $x_0 = 0$ diffbar. (In allen $x_0 \neq 0$ ist $f$ natürlich diff'bar.)

2) Sei $f$ eine konstante Fkt, d. h.

$$f(x) = c \qquad \text{für ein } c \in \mathbb{R}$$

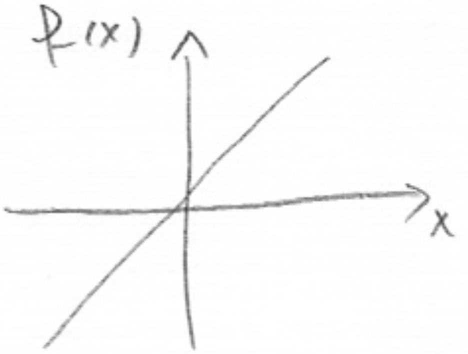



Dann ist $f$ diffbar mit Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \underbrace{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}}_{= \frac{c - c}{x_n - x_0} = 0} = 0$$

3) Sei $f(x) = x$, dann ist $f$ diff'bar mit Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}_{= \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1} = 1$$




4) Höhere Potenzen können wir auch direkt berechnen, z. B.:

$$f(x) = x^2$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x_n \to x} \underbrace{\frac{x_n^2 - x_0^2}{x_n - x_0}}_{= x_n + x_0} = 2x_0$$

also

$$f'(x) = 2x$$

$$\boxed{\text{analog gilt für allgemeines } n \in \mathbb{N}: \ (x^n)' = n\,x^{n-1}}$$

Dies kann man aber auch auf den Fall $f(x) = x$ durch die "Produktregel" zurückführen.

**11.4. Satz:** Seien $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ diff'bar.

Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) in $x_0$ diff'bar und es gilt:

i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis:

i)
$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \underbrace{\frac{(f+g)(x_n) - (f+g)(x_0)}{x_n - x_0}}_{= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}}$$

$$\longrightarrow f'(x_0) + g'(x_0)$$

vgl. 7.5

ii) $(f \cdot g)'(x_0) =$

$$\lim_{x_n \to x_0} \underbrace{\frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(x_0)}{x_n - x_0}}$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0} \{ f(x_n) g(x_n) - f(x_0) g(x_0) \}$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0} \{ f(x_n) g(x_n) - f(x_0) g(x_n) + f(x_0) g(x_n) - f(x_0) g(x_0) \}$$

$$= \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} g(x_n) + f(x_0) \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$f'(x_0) \qquad g(x_0) \qquad g'(x_0)$$

[g diffbar bei $x_0$

$\Rightarrow$ g stetig bei $x_0$ ]

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

iii) ähnlich wie im (ii); oder durch Berechnung von $\left(\frac{1}{x}\right)'$, in kombination mit kettenregel

$\square$

11.5. Satz (Kettenregel): Betrachte (mit $D, W \subset \mathbb{R}$)

$f: D \to W$ und $g: W \to \mathbb{R}$.

Ist $f$ in $x_0 \in D$ diff'bar und $g$ in $f(x_0)$ diff'bar, dann ist die Komposition $g \circ f$ in $x_0$ diff'bar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Dies sieht man formal folgendermaßen:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x_n \to x} \underbrace{\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0}}$$

$$= \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

$$g'(f(x_0)) \qquad\qquad f'(x_0)$$