11.6. Beispiel: Ableitung der Exponentialfunktion

Sei $f(x) = e^x$ $= \exp(x)$ die Exponentialfkt

Wir wollen ihre Ableitung berechnen, unter Benutzung ihrer charakterisierenden Eigenschaft

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Es ist

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \underbrace{\frac{e^{x_n} - e^{x_0}}{x_n - x_0}}_{\frac{e^{x_0+\Delta_n} - e^{x_0}}{\Delta_n}}$$

setze $\Delta_n = x_n - x_0$

$$= \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta_n} - e^{x_0}}{\Delta_n}$$

$$= e^{x_0} \frac{e^{\Delta_n} - 1}{\Delta_n}$$

$$= e^{x_0} \lim_{\Delta_n \to 0} \frac{e^{\Delta_n} - 1}{\Delta_n}$$

Beachte: $\lim\limits_{\Delta_n \to 0} \frac{e^{\Delta_n} - 1}{\Delta_n} = f'(0)$

(da $1 = e^0$)

und mit Hilfe von Abschätzungen wie in Aufg. 1, Blatt 7 kann man zeigen, dass

$$\lim_{\Delta_n \to 0} \frac{e^{\Delta_n} - 1}{\Delta_n} = 1$$

Somit gilt für $f(x) = e^x$:

$f'(0) = 1$

$f'(x) = e^x \cdot 1 = f(x)$

also: $(\exp)' = \exp$

Die Exponentialfkt ist ihre eigene Ableitung!

Dies kann man auch aus der Reihen-entwicklung von e^x sehen, indem wir einfach gliedweise ableiten.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

$$\Rightarrow (e^x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{6} + \frac{4x^3}{24} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$$

Dies ist erlaubt, da die Reihe für e^x absolut konvergiert, und dann sind solche Rechnungen erlaubt.

<u>11.7. Satz:</u> Sei eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ durch eine "Potenzreihe" gegeben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{mit } a_n \in \mathbb{R})$$

welche für jedes $x \in D$ absolut konvergiert. Dann ist f diffbar und die Ableitung ist durch die gliedweise differenzierte Reihe gegeben:

$$f'(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^n}$$

diese Reihe ist dann für jedes $x \in D$ auch absolut konvergent

<u>11.8. Beispiele:</u> 1) Dies erlaubt uns die Ableitungen von sin und cos zu berechnen, da wir für diese auch Reihendarstellungen kennen, siehe 7.23

Wir haben

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$

Somit gilt

$$(\sin x)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} \mp \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$$

$$= \cos x$$

und

$$(\cos x)' = -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} \pm \dots$$

$$= -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots\right)$$

$$= -\sin x$$

also: $\sin' = \cos$

$\cos' = -\sin$

(11-15a)

2) Andererseits können wir aber auch durch gliedweises Differenzieren aus bekannten Reihenentwicklungen neue erzeugen. Z.B. haben wir als Urform der Reihenentwicklung die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{für } x \in (-1,+1)$$

Da

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = (g \circ f)'(x) \quad \text{mit } f(x) = 1-x$$
$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$f'(x) = -1$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

(siehe Auf 2, Blatt 10)

$$= -\frac{1}{f(x)^2} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

erhalten wir die Reihendarstellung

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \text{für } x \in (-1,+1)$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

<u>11.9 Satz:</u> Sei $f: D \to W$ bijektiv und diff'bar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: W \to D$ diff'bar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

wobei $f(x) = y$

Die Formel für die Ableitung von f^{-1} folgt aus der Gleichung

$$f(f^{-1}(y)) = y = id(y)$$

durch Ableiten und die Kettenregel:

$$(f \circ f^{-1})'(y) = id'(y) = 1$$

$$\| $$

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$$

11.10. Beispiele: 1) Die Umkehrfkt ln von exp hat also die Ableitung

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

2) Die Umkehrfunktionen des Sinus und des Kosinus haben die Ableitungen

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$\Rightarrow \cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \underbrace{\sin^2(\arcsin y)}_{y^2}}$

$= \sqrt{1-y^2}$

Also

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

analog

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

<u>11.11. Regeln von l'Hospital:</u> Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ diff'bar. Betrachte $x_0 \in D$; sei $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

<u>11.12. Beispiele:</u> 1) Sei $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = 3x^2 - x$, $x_0 = 0$

Dann ist

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{0} \quad \text{a priori nicht definiert}$$

Wir können aber versuchen, es bei 0 stetig zu definieren als

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x}{3x^2 - x}$; dies können wir von Hand berechnen als

$$\frac{x^3 - 2x}{3x^2 - x} = \frac{\cancel{x}(x^2 - 2)}{\cancel{x}(3x - 1)} = \frac{x^2 - 2}{3x - 1} \xrightarrow{x \to 0} \frac{-2}{-1} = 2$$

oder l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x}{3x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 2}{6x - 1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

2) Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$(\cos 0 = 1)$

3) Eventuell muß man Regel mehrfach anwenden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

<u>11.13 Bemerkung:</u> 1) Beachte, dass man Voraussetzung $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$ braucht; andernfalls bleibt Wert des Quotienten nicht beim Differenzieren erhalten. Betrachte z. B.

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = x - 1, \quad x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\neq$$

$$\text{aber } \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$$

Hier ist $x_0 = 1$ die kritische Stelle:

$\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{0}{0}$ und dort gilt l'Hospital

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

2) l'Hospital gilt auch für Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$ und für $\lim\limits_{x \to \infty}$

Beispiel: $f(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = 2x^2 - 5$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 - \frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1 + 0 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

erhält man auch als

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{4x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$