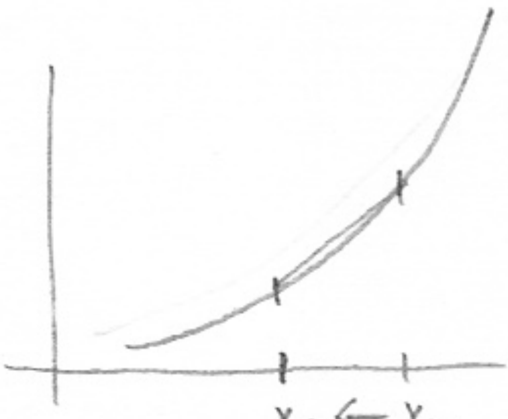
12. Eigenschaften von diff'baren Funktionen: Kurvendiskussion und Taylorreihen

12.1. Motivation:

Die Ableitung einer Funktion im Punkt x_0 enthält Information darüber, wie die Fkt sich in der Nähe von x_0 verhält; insbesondere

i) f monoton wachsend $\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

— " — fallend $\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$



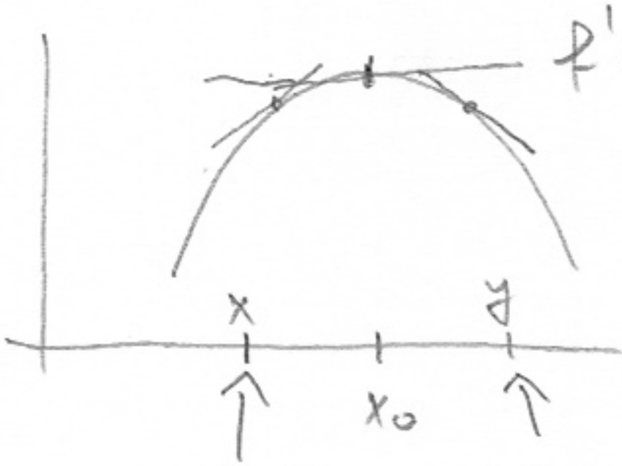
$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}_{\geq 0}$$

da $x_n > x_0 \Rightarrow f(x_n) \geq f(x_0)$

$x_n < x_0 \Rightarrow f(x_n) \leq f(x_0)$

≥ 0

ii) f lokales Maximum oder Minimum bei x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

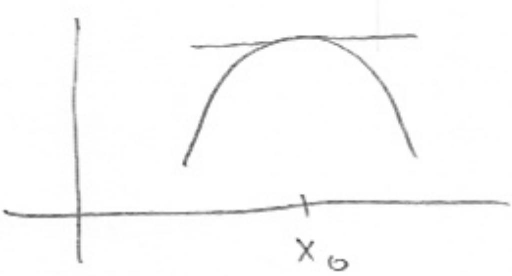


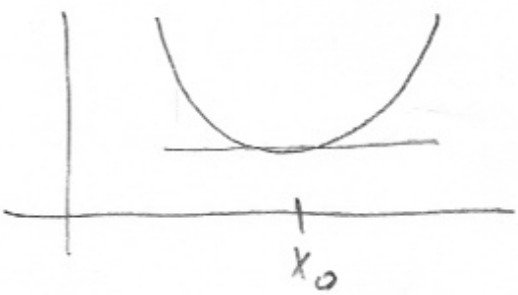
hier ist f monoton wachsend $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

hier ist f monoton fallend $\Rightarrow f'(y) \leq 0$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

iii) Bedingung $f'(x_0) = 0$ kann nicht zwischen Maximum und Minimum entscheiden, dafür braucht man $f''(x_0)$





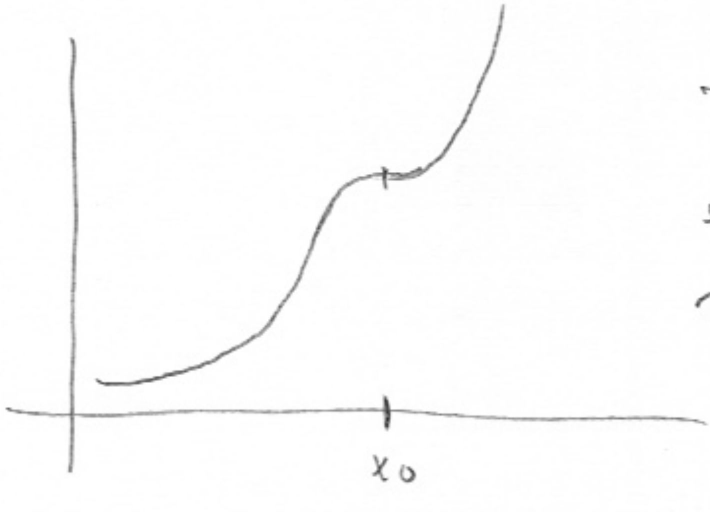
hier nimmt Steigung der Tangente in der Nähe von x_0 ab

$\Rightarrow f''(x_0) < 0$

hier nimmt Steigung der Tangente in der Nähe von x_0 zu

$f''(x_0) > 0$

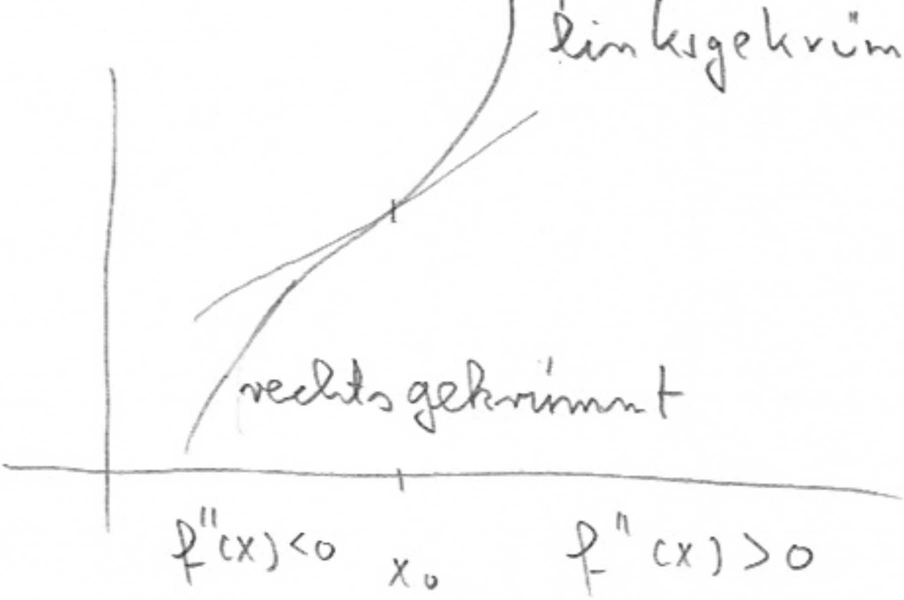
iv) $f'(x_0)$ kann auch Null sein, ohne lokales Maximum/Minimum zu haben,



die Steigung der Tangente nimmt erst ab auf Null steigt dann aber wieder an

wir haben hier einen "Wendepunkt" bei dem die Funktion von "rechtsdrehend" (konkav) zu "linksdrehend" (konvex) übergeht.

Allgemein signalisiert $f''(x_0)$ einen Wendepunkt (wobei $f'(x_0)$ nicht Null sein muß):



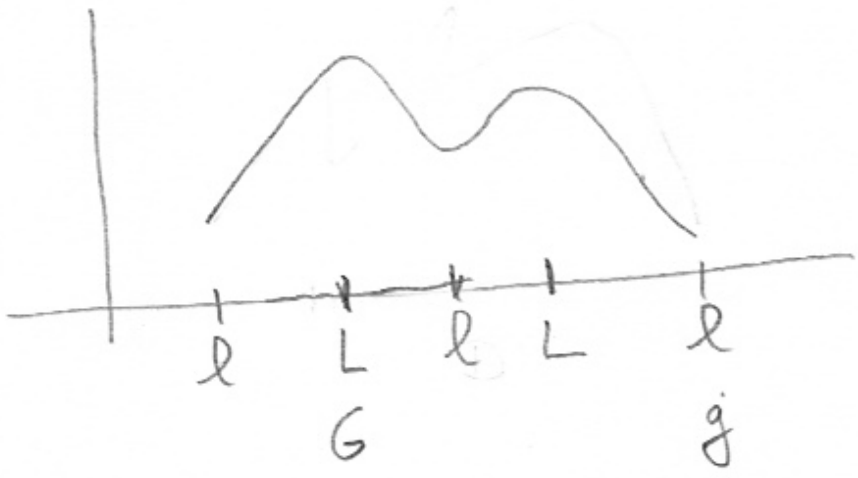
$f''(x)<0$ $\quad x_0 \quad$ $f''(x)>0$

$f''(x_0)=0$

<u>12.2 Definition:</u> Betrachte eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. D sei hierbei Intervall $\to$ $[a,b]$, $(a,$ etc oder auch $[a,\infty)$ $(\infty,\infty$

1) f hat an der Stelle $x_0 \in D$ ein <u>lokales Maximum</u> (bzw. <u>lokales Minimum</u>) falls es eine Umgebung $(x_0 - r, x_0 + r)$ von x_0 gilt (mit $r > 0$) so dass für alle $x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ gilt:

$f(x_0) \geq f(x)$ (bzw: $f(x_0) \leq f(x)$)



L/l lokales Maximum/Minimum
G/g globales — " —

Lokale Maxima und lokale Minima heißen <u>lokale Extrema</u>. Gilt aber die strikte Ungleichung für alle $x \neq x_0$, dann ist x_0 ein striktes lokales Extremum.

2) f heißt <u>monoton wachsend</u>, falls

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

f heißt <u>monoton fallend</u>, falls

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

f heißt <u>strikt monoton wachsend</u>, falls

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f heißt <u>strikt monoton fallend</u>, falls

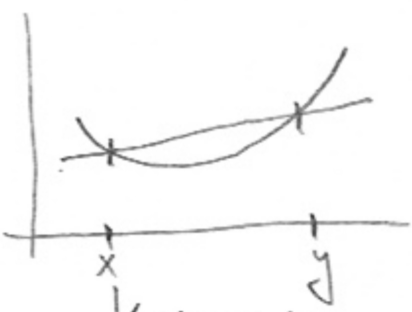
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3) f heißt <u>konvex</u>, falls für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt:

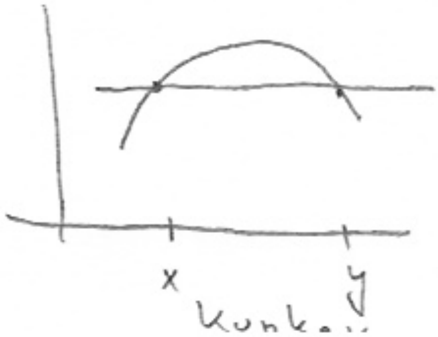
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f heißt <u>konkav</u>, falls für alle $x, y \in D$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



konvex



konkav

12.3. Satz: 1) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff'bar auf (a,b).

i) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f monoton wachsend auf $[a,b]$

ii) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f monoton fallend auf $[a,b]$

iii) Ersetzt man die Ungleichungen durch strikte Ungleichungen, so erhält man die strikte Monoton

⊗ 3) Sei f auf (a,b) zweimal diff'ba und sei $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:

i) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f ein striktes lokales Minimum in x_0.

ii) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f ein striktes lokales Maximum in x

4) Sei f auf (a,b) zweimal diff'bar

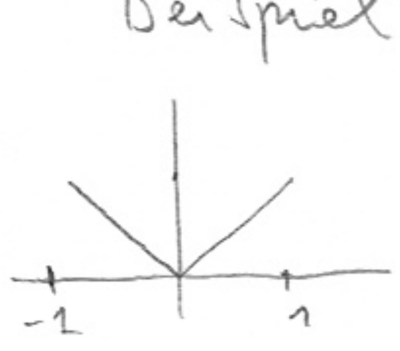
i) Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng konvex.

ii) Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng konkav.

⊛ 2) Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum und sei dort diff'bar. Dann gilt: $f'(x_0) = 0$

<u>12.4. Bemerkung:</u> Man beachte, dass bei der Suche nach Extrempunkten die Bedingung $f'(x_0)$ nur Punkte liefert die im Innern liegen und wo f diff'bar ist. Die anderen Möglichkeiten müssen gesondert betrachtet werden.

Beispiel: $f(x) = |x|$ auf $[-1,1]$



f hat lokale Maxima bei ± 1 und ein lokales Minimum bei 0 aber f' ist nie $= 0$

12.5 Beispiel: Kurvendiskussion

Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x e^{-x}$$

Es gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \quad \left(= \frac{\infty}{\infty}\right)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x) e^{-x}$$

$$= (x-2) e^{-x}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow f'(1) &= 0 \\ f''(1) &= -e^{-1} < \infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{lokales Maximum bei } x = 1$$

$f' > 0$ auf $(-\infty, 1) \leftarrow$ str. monoton wachsend

< 0 $\quad (1, \infty)$ $\quad$ fallend

$f'' < 0$ auf $(-\infty, 2)$ $\leftarrow$ str. konkav

$f'' > 0$ $(2, \infty)$ str. konvex

$f''(2) = 0$ Wendepunkt bei $x = 2$