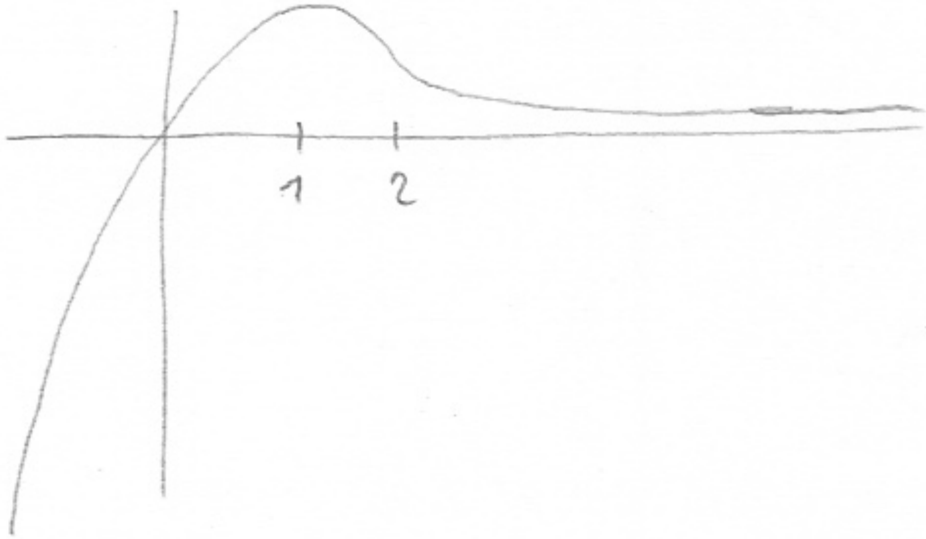
$f'' < 0$ auf $(-\infty, 2)$ ← str. konkav

$f'' > 0$ $\quad (2, \infty)$ str. konvex

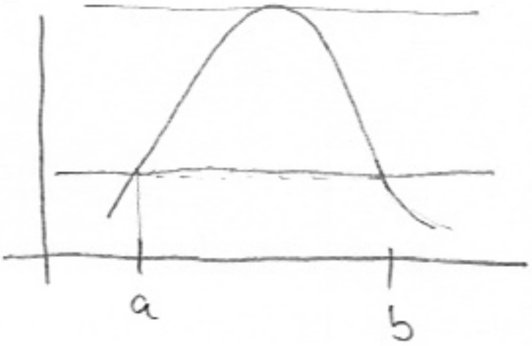
$f''(2) = 0$ Wendepunkt bei $x = 2$



<u>12.6. Mittelwertsatz</u>: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x)$$

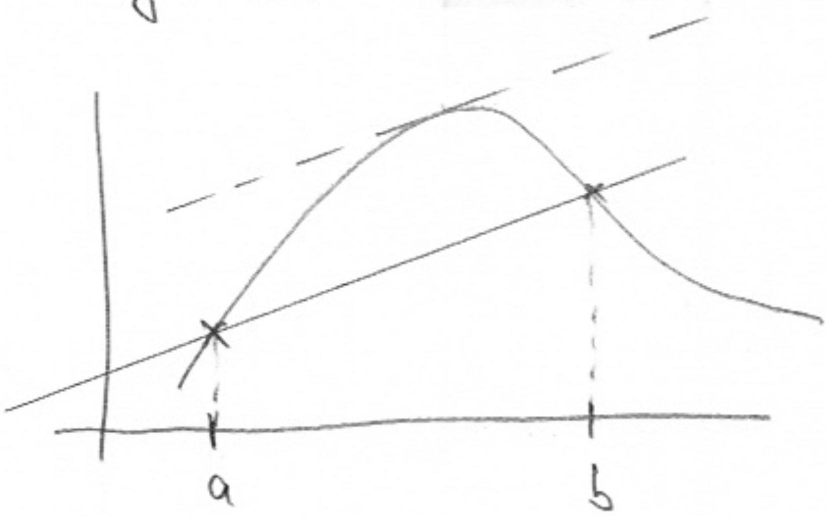
(Satz von Rolle)



Fall: $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ es gibt Minimum oder Maximum, dort ist $f'(x) = 0$

allgemeiner Fall:



12.7 Bemerkung: Der Mittelwertsatz macht die Aussage präzise, dass wir $f(b)$ in der Nähe von a durch $f(a)$ approximieren können, insbesondere liefert er eine "präzise" Aussage über den Fehler:

$$f(b) = f'(x) \cdot (b-a) + f(a)$$

also: $f(b) \approx f(a)$

und der Fehler ist $f'(x) \cdot (b-a)$, wobei wir x nicht genau kennen, aber wissen, dass $a < x < b$. Falls wir also Abschätzungen für $f'(x)$ für <u>alle</u> $x \in (a,b)$ haben, so können wir den Fehler abschätzen.

<u>12.8. Beispiel</u>: Meist schreibt man obiges in der Form $\left[\begin{matrix} a \to x_0 \\ b \to x \end{matrix} \quad x \to \xi\right]$

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

Betrachte: $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$\sin 0 = 0$, $\sin'(\xi) = \cos \xi$

also:

$$\sin x = 0 + \cos \xi (x - 0)$$

$$= \cos \xi \cdot x$$

Da wir wissen, dass $|\cos \xi| \leq 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$, sagt uns dies

$$|\sin x| \leq |x|$$

Für grosse x ist dies uninteressant (da auch $|\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$), aber für kleine x ist dies eine gute Abschätzung für sin.

12.9 Bemerkung: Der Mittelwertsatz macht also die Aussage

$$f(x) \approx f(x_0) \quad \text{(für } x \text{ nahe bei } x_0\text{)}$$

präzise. Die Motivation der Ableitung war aber, dass wir $f(x)$ durch eine lineare Funktion approx. können, also

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Eine verfeinerte Anwendung des Mittelwertsatzes erlaubt nun auch hier den Fehler präzise anzugeben (falls f zweimal diffbar ist):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$$

wobei ξ wiederum ein (nicht weiter bestimmter) Punkt in (x_0, x) bzw. (x, x_0) ist. Kontrolle der 2^{ten} Ableitung für all solche Zwischenstellen erlaubt dann Kontrolle des Fehlers bei der linearen Approximation.

12.10. Beispiel: Im Fall von 12.8. erhalten wir dann

$$f(x) = \sin x\,, \quad f'(x) = \cos x\,, \quad f''(x) = -\sin$$

also für $x_0 = 0$:

$$\sin x = \overset{=0}{\sin 0} + \overset{=1}{\cos 0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(-\sin \xi)\,(x - x_0)^2$$

$$= x - \frac{1}{2} \sin \xi \cdot x^2$$

$$\Rightarrow |\sin x - x| \leq \frac{1}{2} \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq 1} \cdot x^2 \leq \frac{1}{2} x^2$$

Diese Approximation durch konstante, lineare, quadratische etc Terme kann beliebig weit getrieben werden und resultiert in einer Approximation von f durch Potenzreihen, die sogenannte Taylorreihenentwicklung von f.

12.11. Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied)

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und seien $x, x_0 \in (a,b)$. Dann gibt es eine Zwischenstelle ξ zwischen x und x_0 mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

[$f^{(n)}$ bezeichnet die n-te Ableitung von f: $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, ...]

12.12. Bezeichnung: Man nennt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

das n-te Taylorpolynom von f im Punkt x_0. Der Fehler

$$R_{n+1}(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt Restglied $(n+1)$-ter Ordnung

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{2-tes Taylorpolynom}} + R_3$$

$$\text{mit } R_3(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi)(x-x_0)^3$$

für ein ξ zwischen x_0 und x

<u>12.13. Bemerkung</u>: Ist f unendlich oft differenzierbar und können wir garantieren, dass $R_{n+1}(x)$ $\overbrace{\text{gegen}}^{\text{für } n \to \infty}$ Null geht (z.B. durch hinreichende Kontrolle über $f^{(n+1)}(\xi)$ für alle ξ), dann bekommen wir eine Darstellung von f als unendliche Reihe

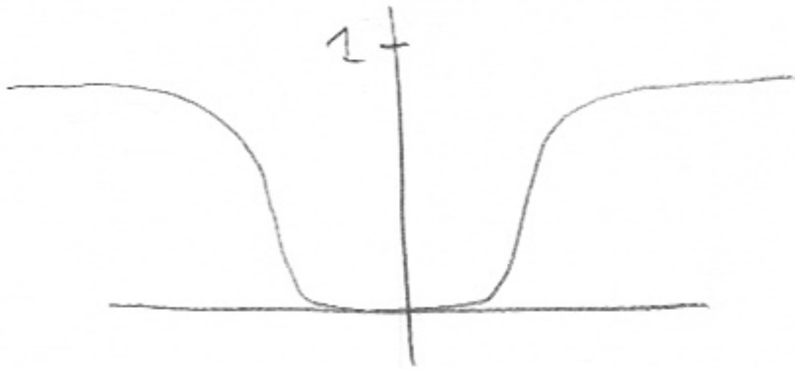
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Dies ist dann die <u>Taylorreihe</u> von f, die $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ sind die <u>Taylorkoeffizienten</u>

12.14. Beispiele: 1) Selbst wenn alle Taylorpolynome existieren und für $n \to \infty$ konvergieren, garantiert dies nicht, dass f durch diese Taylorreihe gegeben ist. Wesentlich ist, dass man zeigen kann, dass das Restglied gegen Null geht!

Betrachte $f(x) = \exp\left[-\frac{1}{x^2}\right] \quad (x \neq 0)$

$$f(0) = 0$$



Diese Fkt ist bei 0 ∞-oft diffbar und es gilt: $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. jedes Taylorpolynom im Punkt $x_0 = 0$ ist identisch Null und liefert keine sinnvolle Approximation von f für Pkte $x \neq 0$. Die Funktion stimmt für alle n mit dem entsprechenden Restglied überein!

2) Betrachte $f(x) = e^x$

Dann ist $f^{(n)}(x) = e^x$ für alle n

und die Taylorentwicklung um $x_0 = 0$

liefert:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!} x^k + R_{n+1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$$

und wir haben die Abschätzung:

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^{\xi} x^{n+1} \right|$$

$$\leq \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} e^{|x|} \quad \text{für alle } x$$

D.h. $\lim_{n \to \infty} |R_{n+1}(x)| = 0$ für alle x

und wir erhalten unsere schon bekannte Reihendarstellung für die exp-Fkt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

3) Betrachte jetzt $f(x) = \ln x$, (12-1

für den wir noch keine Reihendarstellung kennen. Da $\ln x$ bei 0 nicht definiert ist, betrachten wir eine Entwicklung um $x_0 = 1$.

Es gilt: $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3},$$

$$f''''(x) = -2 \cdot 3 \frac{1}{x^4}, \ldots$$

allgemein: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! \frac{1}{x^n}$

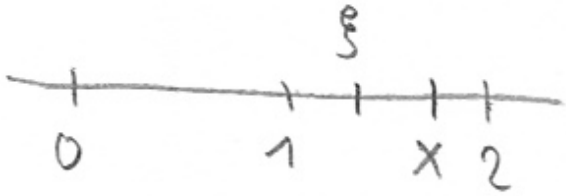
somit: $f(1) = 0$

$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} (n-1)!$ für $n \geq 1$

Das Restglied ist gegeben durch

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+2} \cdot n!}{(n+1)!} \cdot \underbrace{\frac{1}{\xi^{n+1}} (x-1)^{n+1}}_{\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1}}$$

Sei nun $1 \leq x \leq 2$



dann ist $x - 1 \leq 1 < \xi$, also

$\frac{x-1}{\xi} < 1$ und somit

$R_{n+1}(x) \longrightarrow 0$ für alle $1 \leq x \leq 2$

Somit haben wir für $1 \leq x \leq 2$:

$$\ln(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(1)}{k!}} \cdot (x-1)^k$$

$$= \begin{cases} (-1)^{k+1}(k-1)! & k \geq 1 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

oder für $0 \leq x \leq 1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \qquad (*)$$

Insbesondere gilt dies auch für $x = 1$, d. h. wir bekommen so den Wert der alternierenden harmonischen Reihe [welche ja nicht absolut konvergent ist, von daher sensitiv gegen Umordnungen!]:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \dots$$

Die Darstellung (*) gilt auch für $-1 < x < 0$, dies folgt aber nicht aus unserer Darstellung des Restgliedes; man braucht andere Abschätzungen.

Potenzreihenentwicklung gilt für symmetr. Intervall um x_0