14. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Integrale als Flächen (bzw. Riemann Summen)

14.1. Motivation:

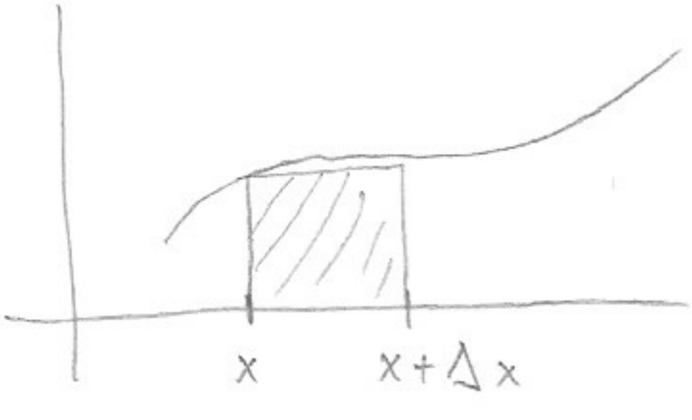
Wir fragen jetzt, ob jede Funktion f überhaupt eine Stammfunktion besitzt; wir betrachten dafür nur stetige f.

$F'(x) = f(x)$ bedeutet dass

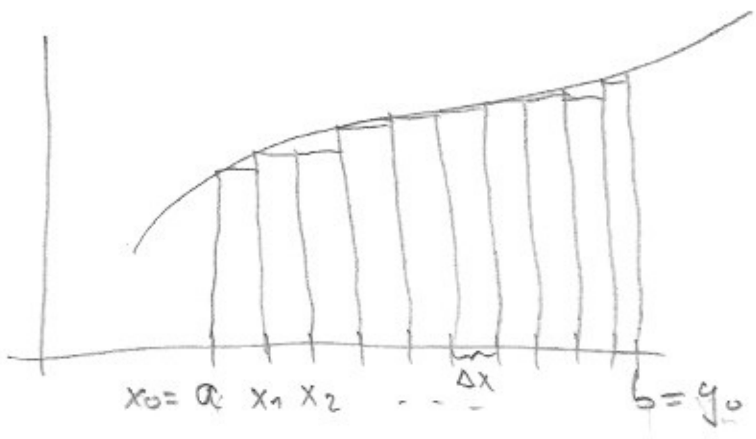
$$f(x) \approx \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

also (für kleines Δx)

$$F(x+\Delta x) \approx F(x) + f(x)\cdot\Delta x$$



oder allgemeiner für den Zuwachs von F von a bis b



$$F(b) - F(a) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

je größer wir n machen, desto besser sollte dies gelten

Man zeigt nun: die Summe $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$ konvergiert gegen einen Grenzwert für $\Delta x \to 0$ (und damit $n \to \infty$); diesen bezeichnet man mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Die obigen Summen heißen Riemann-Summen

und es gilt dann nach obigem

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

für jede Stammfkt von f

↑ beachte, dass die unbestimmte Konstante in der Stammfkt in der Differenz $F(b) - F(a)$ wegfällt

Wenn wir also unsere Konstante in F so wählen, dass $F(a) = 0$ ist, dann erhalten wir eine Stammfunktion F von f gemäß

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

wobei letzteres als Grenzwert der Riemann-Summen definiert ist.

<u>14.2. Satz:</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

1) Dann existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

und

$$F(x) := \int_a^x f(x)\,dx$$

ist eine Stammfunktion von f.

2) Für jede Stammfunktion F von f gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{F(b) - F(b)}_{\text{hierfür schreibt man oft } F|_a^b}$$

<u>14.3. Bemerkung:</u> 1) Dieser Satz verknüpft somit zwei apriori verschiedene geometrische Probleme:

i) $\int_a^b f(x)\,dx$ Berechnung der Fläche unter der Kurve $f(x)$

ii) f' Berechnung der Tangente an die Kurve $f(x)$

14.2. sagt, dass diese Probleme invers zueinander sind, formal

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

und

$$\left(\int_a^x f(y)\,dy\right)' = f(x)$$

2) Die Interpretation von $\int_a^b f(x)\,dx$ als Grenzwert einer Summe erklärt auch die Notation fürs Integral

$$\sum f(x_i)\,\Delta x_i \longrightarrow \int f(x)\,dx$$

3) Für die Ableitung f' benutzt man analog auch die Bezeichnung

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{dx} \quad \left(= \lim \frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$$

4) Formal schreibt man dann auch $d f(x) = f'(x)\, dx$;

dies liefert eine Interpretation der Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)\, dx}_{d\, g(x)} = F(g(x))$$

gemäß Substitution $y = g(x)$

für bestimmte Integrale

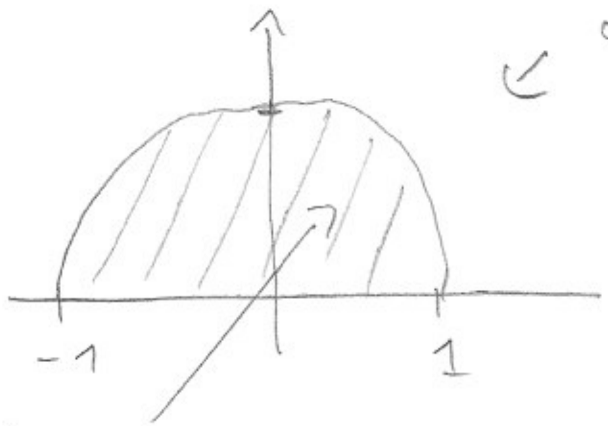
<u>14.4. Satz (Substitution)</u>: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $g: J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(J) \subset I$. Dann gilt für beliebige $a, b \in J$

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

14.5. Beispiele: 1) Betrachte

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$



obere Hälfte des Einheitskreises

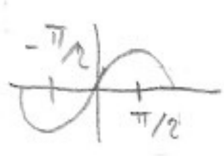
$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \text{Fläche des halben Einheitskreises}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Können wir dies berechnen?

Dazu substituieren wir x durch $g(x) = \sin x$, also

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \int_{-1 \,\leftarrow\, \sin(-\frac{\pi}{2})}^{+1 \,\leftarrow\, \sin\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$



$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 x}\; \underbrace{d \sin x}_{\cos x\, dx}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 x}}_{\cos x} \cos x \, dx$$ (14-7

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

Im 13 S. hatten wir eine Stammfunktion von $\cos^2 x$ berechnet, nämlich

$$\int \cos^2 x \, dx = F(x) = \frac{1}{2}(x + \cos x \cdot \sin x)$$

und somit

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

$$= F \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}$$

$$= F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

2) Formales Manipulieren mit "Differentialen" $d f(x)$ und dx erlaubt manchmal auch ein direktes Lösen von Differentialgleichungen. Betrachte z. B. die Dgl

$$f'(x) = g(x) f(x)$$

für gegebene Funktion g.

Wir rechnen formal

$$\frac{d f(x)}{dx} = g(x) \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d f(x)}{f(x)} = g(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{d f(x)}{f(x)} = \int g(x)\, dx =: G(x)$$

Stamm fkt von g

$$\overset{\shortparallel}{\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{G(x)}$$

Durch Differentieren prüft man leicht nach, dass dies wirklich eine Lösung ist!

14.6. Definition: Uneigentliche Integrale

sind von der Form $\int_a^b f(x)\,dx$

wo

- a oder b gleich $\pm\infty$ sein können
- wo $f(x)$ an den Grenzen a, b nicht beschränkt ist

Solche Integrale werden als Grenzwerte von $\int_{a_n}^{b_n}$ definiert, wobei $a_n \to a$
$b_n \to b$

Die Theorie ist ähnlich wie bei Reihen, insbesondere muss man zwischen bedingt konvergent und absolut konvergent unterscheiden und wesentliche Hilfsmittel zum abstrakten Entscheiden der Konvergenz (d.h. ohne den Wert des Integrals zu berechnen) sind Majoranten- und Minorantenkriterium, vgl Satz 7.15 zu Reihen

14.7. Beispiele: Sind

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad \text{oder} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

endlich oder unendlich

Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_1^b \frac{1}{x}\,dx}_{\ln x\big|_1^b} = \ln b - \ln 1 = \ln b \longrightarrow \infty \text{ für } b \to \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx}_{-\frac{1}{x}\big|_1^b} = -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{b} \longrightarrow 1 \text{ für } b \to \infty$$

also:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < \infty$$

2) Was ist mit

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Für e^{-x^2} kennen wir keine Stammfkt, wir können das also nicht direkt berechnen. Wir erwarten aber, dass es endlich ist, da e^{-x^2} für $x \to \infty$ sehr schnell gegen Null geht.

Um dies rigoros zu machen, können wir es gegen ein endliches Integral abschätzen, welches wir berechnen können: $(x-1)^2 \geq 0$ d.h.

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \text{d.h.}$$

$x^2 \leq -2x + 1$ und somit

$$e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \underbrace{\int_0^\infty e^{-2x+1}\,dx}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x+1}\Big|_0^\infty$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2} e^1\right) = \frac{1}{2} e < \infty$$