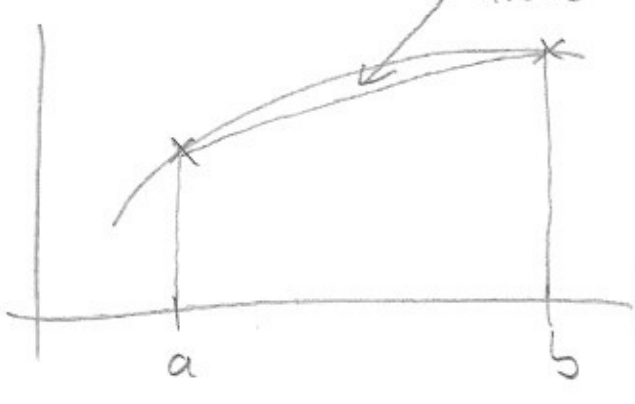
15. Numerische Verfahren zur Integration und Bestimmung von Nullstellen

15.1. Bemerkung: Oft haben wir keine explizite Form der Stammfunktion, wie z.B. für $\int e^{x^2}\,dx$, dann sind numerische Approximationen von Integralen nötig. Die grundlegende Idee ist, die Fkt f durch einfachere Funktionen zu approximieren.

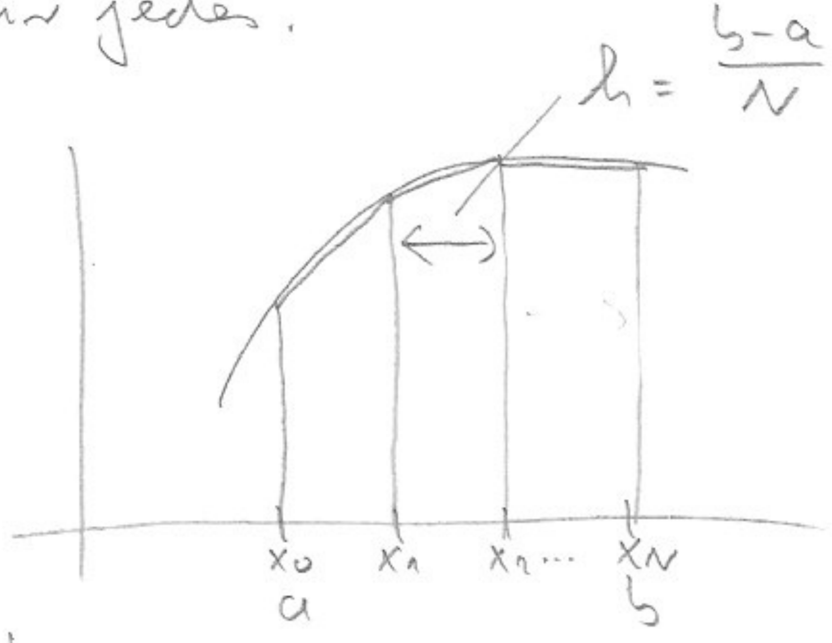
1) Trapezregel



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

2) Trapez-Summenregel

Unterteile $[a,b]$ in N Teilintervalle und benutze Trapezregel für jedes.



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$$

Wie üblich, sollte man Kontrolle über den Fehler haben. Dieser kann durch Kontrolle der 2^{ten} Ableitung auf $[a,b]$ abgeschätzt werden, z. B. durch

$$\frac{b-a}{12} h^2 \cdot M$$

Schranke für f'' auf $[a,b]$

$|f''(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$

3) Approximation von f durch Polynom 2^{ten} Grades liefert Keplersche Faßregel (für $N=1$) bzw. die Simpson Regel (für beliebiges N)

Fehler kann dann durch die 4-te Ableitung von f kontrolliert werden und ist proportional zu h^4.

15.2. Numerische Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen:

Ist $f: [a,b]$ stetig und

$$f(a) < 0 < f(b)$$

so wissen wir gemäß dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle ξ von f im Intervall $[a,b]$ geben muß:

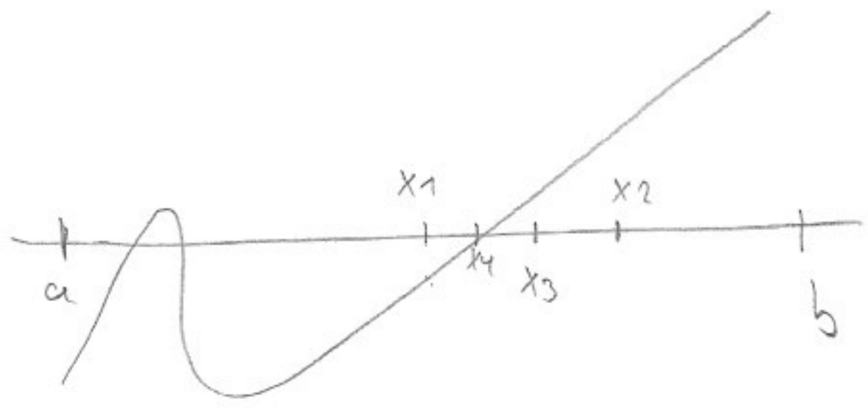
$f(\xi) = 0$

Wie können wir ξ finden, falls wir die Gleichung $f(\xi)=0$ nicht explizit lösen können?

1) Bisektion (fortlaufende Halbierung des Intervalls):

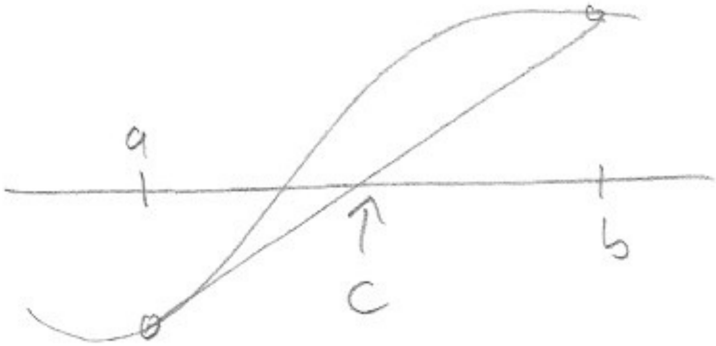
- Halbiere Intervall: $c = a + \frac{b-a}{2}$
- Berechne $f(c)$
- Ist $f(c) < 0$ ersetze $[a,b]$ durch $[c,b]$
  $f(c) > 0$ ersetze $[a,b]$ durch $[a,c]$

In jedem Schritt wird die Approximation um Faktor $\frac{1}{2}$ besser.



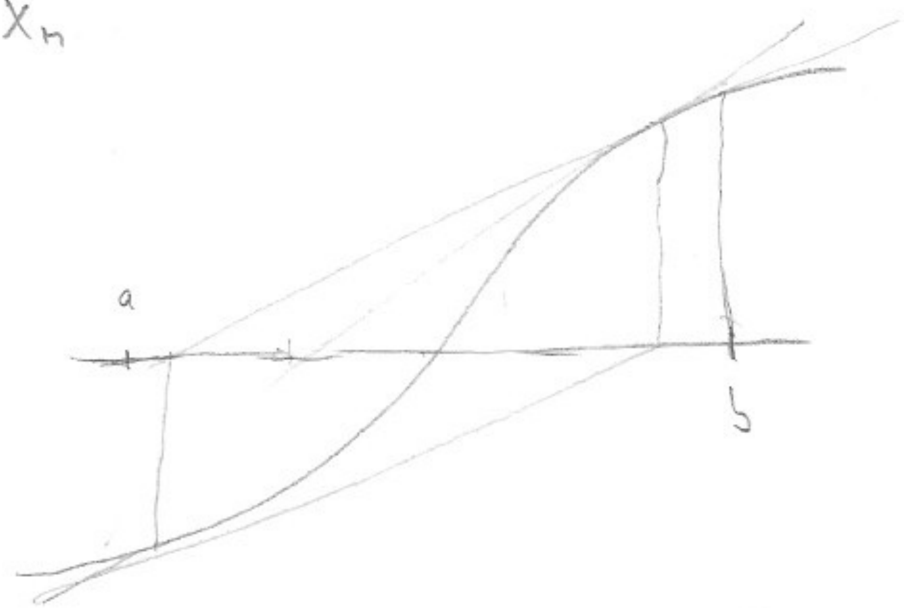
2) Sekantenmethode

Berechne nächsten Punkt durch Nullstelle der Sekante



3) Newton-Verfahren

Berechne nächsten Punkt x_{n+1} durch Nullstelle der Tangente im Punkt x_n



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Unter hinreichend guter Kontrolle von f (z.B. $f'' > 0$ auf $[a,b]$) kann man Fehler abschätzen, geht dann quadratisch gegen Null.