Mathematik für Naturwissenschaftler

(Chemiker)

1. Zahlen und Rechnen mit Zahlen

1.1. Notationen: Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{array}\right\} \text{natürliche Zahlen}$$

$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

rationalen Zahlen (Brüche)

$\mathbb{R} := \{$unendliche Dezimal~~brüche~~ zahlen$\}$

reellen Zahlen

$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ wobei $i^2 = -1$

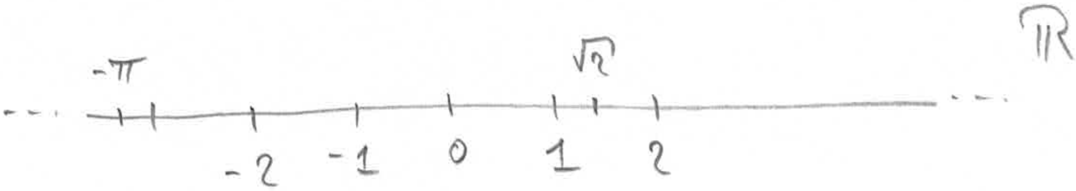
komplexen Zahlen

1.2. Bemerkungen: 1) Die Konvention für $\mathbb{N}$ ist nicht einheitlich, oft wird auch $\mathbb{N}$ für $\mathbb{N}_0$ geschrieben

2) Die "meisten" reellen Zahlen lassen sich nicht als Bruch schreiben, z. B

$$\underbrace{\sqrt{2}, e, \pi}_{\in \mathbb{R}} \notin \mathbb{Q}$$

3) $\mathbb{R}$ wird normalerweise als Zahlenstrahl veranschaulicht



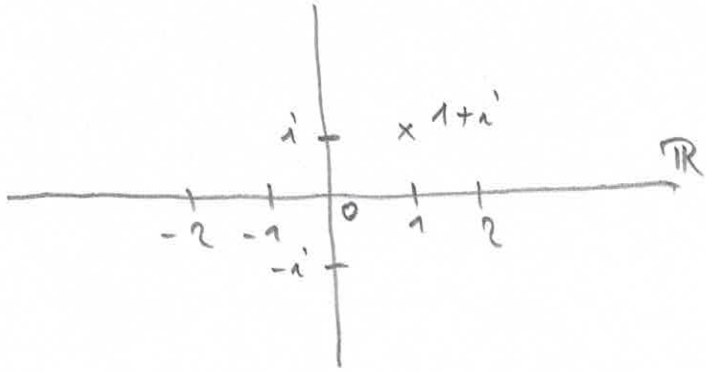
Bei $\mathbb{Q}$ "fehlen" Zahlen (wie $\sqrt{2}, -\pi, ..$), $\mathbb{R}$ hingegen ist vollständig

Der Zahlenstrahl entspricht auch der Tatsache, dass man reelle Zahlen miteinander vergleichen kann: $\sqrt{2} \leq 2$, $-\pi \leq 0$

$\mathbb{R}$ ist "angeordnet"

4) $\mathbb{C}$ hingegen hat keine Anordnung, kann aber als Zahlenebene veranschaulicht werden

$\mathbb{C}$



Aussagen wie "$i \leq 1$" oder "$1 \leq i$" machen keinen Sinn (führen zu Widersprüchen)

1.3. Algebraische Operationen: Wir haben die algebraischen Operationen

$+$ Addition $\qquad x+y$

$\cdot$ Multiplikation $\qquad x \cdot y$

und auf $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ auch die inversen Operationen

$-$ Subtraktion $\qquad x-y$

$:$ Division $\qquad x:y$ oder $\frac{x}{y}$

mit den üblichen Rechenregeln, wie:

$x+y=y+x \quad , \quad x \cdot y = y \cdot x$ Kommutativgesetz

$$\left.\begin{array}{l} (x+y)+z = x+(y+z) =: x+y+z \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) =: x \cdot y \cdot z \end{array}\right\} \text{Assoziativgesetze}$$

$x(y+z) = xy + xz$ Distributivgesetz

1.4. Bruchrechenregeln: Für Brüche haben wir

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$$

$$\frac{1}{p/q} = \frac{q}{p}$$

1.5. Potenzrechnen: Wir setzen

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$$

Dann gilt $(n, m \in \mathbb{N})$

$$a^n a^m = \underbrace{\underbrace{a \ldots a}_{n} \cdot \underbrace{a \ldots a}_{m}}_{n+m} = a^{n+m}$$

$$a^n b^n = \underbrace{a \ldots a}_{n} \underbrace{b \ldots b}_{n} = \underbrace{(ab)(ab) \ldots (ab)}_{n \text{ mal } ab} = (ab)^n$$

$$(a^n)^m = \left.\begin{matrix} \overbrace{a \ldots a}^{n} \cdot \\ a \ldots a \\ \vdots \\ a \ldots a \end{matrix}\right\} m = a^{n \cdot m}$$

beachte: $(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$

Wir definieren auch $a^0 := 1$; dies ist verträglich mit obigen Regeln:

$$a^n a^0 = a^n \cdot 1 = a^n = a^{n+0}$$

$$a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (ab)^0$$

$$(a^0)^m = 1^m = 1 = a^0 = a^{0 \cdot m}$$

Auch a^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ können wir sinnvoll definieren

als $a^{-n} := \dfrac{1}{a^n}$

denn dann gilt:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1 = a^{n-n}$$

Frage: Was ist mit $a^{1/n}$. Für das sollte gelten:

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^{1/n \cdot n} = a^1 = a,$$

d.h. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

beachte: Wurzeln machen erst mal nur in $\mathbb{R}$ Sinn für $a \geq 0$, da z.B. $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung hat.

Für $a > 0$ können wir also

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, \quad a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

$p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

d.h. a^q für $q \in \mathbb{Q}$ definieren.

Später werden wir dies auf $q \in \mathbb{R}$ ausdehnen.

<u>1.6. Logarithmen:</u> Logarithmieren ist die Umkehrung des Potenzierens

Man fixiert eine Basis, typischerweise 10 und definiert für $x > 0$

$\log x :=$ die (eindeutig bestimmte) Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $10^y = x$

Beispiele:

- $\log 100 = ?$

  $100 = 10^2 \Rightarrow \log 100 = 2$

- $\log 1 = ?$

  $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$

- $\log \frac{1}{10} = ?$

  $\frac{1}{10} = 10^{-1} \Rightarrow \log \frac{1}{10} = -1$

- $\log \sqrt{10} = ?$

  $\sqrt{10} = 10^{1/2} \Rightarrow \log \sqrt{10} = 1/2$

Die Rechenregeln für den Logarithmus sind die Umkehrungen der Regeln für Potenzieren

$\log(x \cdot y) = ?$

$$10^{\log(x\cdot y)} = x \cdot y = 10^{\log x} \cdot 10^{\log y}$$
$$= 10^{\log x + \log y}$$

$$\Rightarrow \log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

Oft benutzt man statt 10 eine andere Basis, insbesondere

- in der Mathematik: e Eulersche Zahl $= 2.7182\ldots$

  $\to$ natürlicher Logarithmus

  $\ln$

- in der Informatik, Informationstheorie:

  2

Alle Logarithmen haben die gleichen Eigenschaften und man kann zwischen ihnen umrechnen.

$$b^{\log_b x} = x = c^{\log_c x} \qquad c = b^{\log_b c}$$

$$= \left(b^{\log_b c}\right)^{\log_c x}$$

$$= b^{\log_b c \cdot \log_c x}$$

$$\Rightarrow \log_b x = \underbrace{\log_b c}_{\text{Konstante}} \cdot \log_c x$$

(abhängig von b, c
aber nicht von x)

z.B. $\underset{\log_e x}{\overset{\shortparallel}{\ln x}} = \underbrace{\log_e 10}_{\approx 2.302\ldots} \cdot \underset{\log_{10} x}{\overset{\shortparallel}{\log x}}$

1.7. Bemerkungen: 1) Etliche chemische oder physikalische Größen werden auf einer logarithmischen Skala gemessen, z.B.

i) pH-Wert = negativer Logarithmus der Wasserstoffionenkonzentration

ii) Dezibel $\hat{=}$ Logarithmus der Schallintensität
Phon

2) Auf logarithmischer Skala zu Basis 10 entspricht Änderung um 1 einer Verzehnfachung der zugrundeliegenden Größe.

3) Beachte: Logarithmus macht nur Sinn von Zahlen, nicht von physikalischen Größen mit Einheiten, d.h. z.B.

Dezibel ist nicht log (Schallintensität), sondern

$$\log\left(\frac{\text{Schallintensität}}{\text{Referenz-Schallintensität}}\right)$$