2. Sprache und Beweise in der Mathematik

2.1 Bemerkung: 1) Mathematik ist eine präzise Wissenschaft und benutzt

- eine präzise Sprache, Symbole, Definitionen
- strenge Beweise von ihren Aussagen

Für den Chemiker ist dies nicht unbedingt so relevant; wichtig ist, dass

- man weiss, wovon man spricht
- man eine Idee hat, warum Formeln und Aussagen richtig sind

2) Einige wichtige Notationen sind:

i) $\Longrightarrow$: daraus folgt

$$x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$$

$\Longleftrightarrow$: äquivalent
gilt genau dann wenn (gdw)

$$x = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 0$$

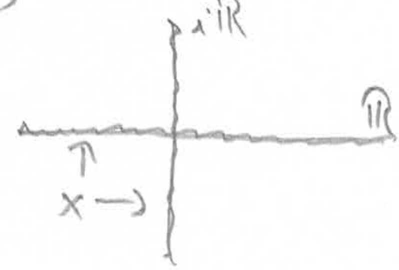
ii) $\wedge$ und

$(x \geq 0) \wedge (x \leq 2)$ gdw

$x \in [0, 2]$

$\vee$ oder (im einschliessenden Sinne, d.h. es können auch beide gelten)

$x \in \mathbb{R} \vee x = iy$ $(y \in \mathbb{R})$ gdw



3) Viele mathematische Symbole sind Abkürzungen für komplizierte Schreibweisen.

<u>2.2. Notation:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann schreiben wir

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n =: \sum_{k=1}^{n} a_k$$

und

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n =: \prod_{k=1}^{n} a_k$$

<u>2.3. Bemerkungen und Beispiele:</u> 1) Der Index k ist hierbei ein beliebiger Platzhalter, also z.B.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{r=1}^{n} a_r$$

Man kann auch andere Grenzen nehmen, z.B.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

2) Für $a_k = k$ haben wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n-1 + n$$

und für $a_k = r^k$ (für ein $r \in \mathbb{R}$)

haben wir die <u>geometrische Reihe</u>

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \underbrace{r^0}_{=1} + r^1 + r^2 + \dots + r^n$$

<u>2.4. Satz:</u> 1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Für $r \in \mathbb{R}$ (oder auch $r \in \mathbb{C}$) mit $r \neq 1$

und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

<u>2.5. Bemerkung:</u> Beweise sollen uns davon überzeugen, dass die Aussage richtig ist; es gibt Beweise, die das tun, ohne uns die Aussage wirklich näherzubringen, und solche, die uns erlauben, das Resultat selbst zu entdecken. Wir geben zwei solche unterschiedliche Beweise für Teil 1.

Beweis: 1) mit vollständiger Induktion

Aussage ist wahr für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

zeige: wenn Aussage für n gilt, dann gilt sie auch für $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{1+2+\dots+n}_{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

somit gezeigt

2) à la Gauß

Setze $x := \sum_{k=1}^{n} k$

Dann ist

$$x = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$
$$x = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

$$2x = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) \ldots + (n+1)}_{n\text{-mal}}$$

$$= n(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{n(n+1)}{2}$$

3) direkter Beweis für geometrische Reihe:

Setze $x := \sum_{k=0}^{n} r^k$

Dann ist

$$x = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n$$
$$rx = \quad r + r^2 + \ldots + r^{n-1} + r^n + r^{n+1}$$

$$\underbrace{x - rx}_{x(1-r)} = 1 - r^{n+1}$$

für $r = 1$ sagt dies $0 = 0$, also nichts über x

$$\xRightarrow{r \neq 1} \quad x = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$\square$