# 3. Mengen und Funktionen

## 3.1. Notationen:

1) Wir schreiben Mengen oft in aufzählender Form, z. B.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

oder beschreibender Form, z. B.

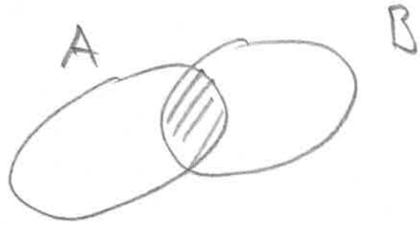
$P := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$

und benutzen folgende Bezeichnungen

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$


Vereinigung

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$



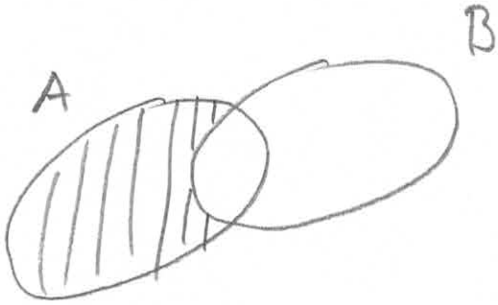

Durchschnitt

$A \subset B$ A ist Teilmenge von B, d.h.

$x \in A \Rightarrow x \in B$


beachte: es kann auch $A = B$ gelten, d.h. wir machen keinen Unterschied zwischen "$\subset$" und "$\subseteq$"

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \notin B \}$




Differenz

$x \in A$ heißt: $x$ ist Element von $A$

$x \notin A$ heißt: $x$ ist kein Element von $A$

z. B. $2 \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$

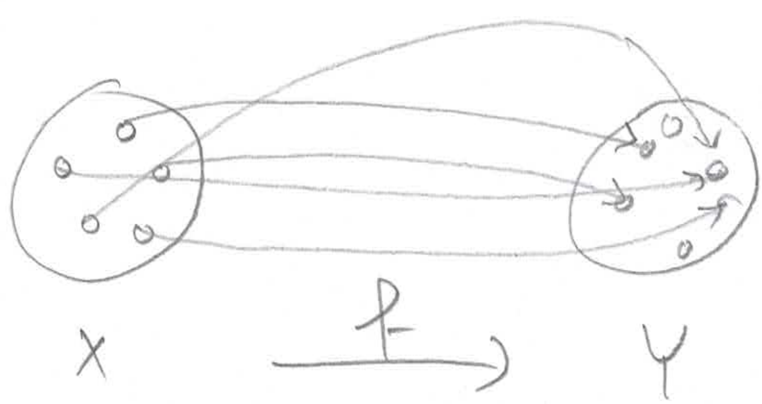
$-5 \notin \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

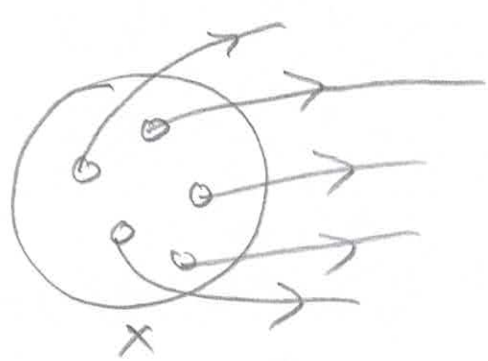
2) Seien $X, Y$ Mengen. Eine <u>Abbildung</u> oder <u>Funktion</u>

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto f(x)$$

ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

<u>3.2. Bemerkungen:</u> 1) Veranschaulichung



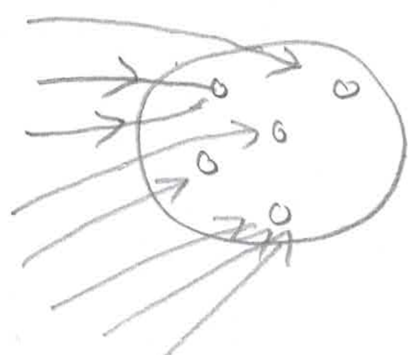


Funktion heißt, dass von jedem $x \in X$ ein Pfeil ausgeht

2) Wenn wir die Funktion umkehren wollen, $f^{-1}: Y \to X$, dann muss bei jedem $y \in Y$ genau ein Pfeil ankommen, d. h.

- $f$ muss injektiv sein: bei jedem $y \in Y$ kommt höchstens ein Pfeil an

- $f$ muss surjektiv sein: bei jedem $y \in Y$ kommt mindestens ein Pfeil an



- injektiv + surjektiv = bijektiv
  d. h. es kommt bei jedem $y \in Y$ genau ein Pfeil an

3.3 Definition: 1) Eine Funktion $f: X \to Y$ heißt

- injektiv, falls: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- surjektiv, falls: für jedes $y \in Y$ gibt es (mindestens) ein $x \in X$ mit $f(x) = y$
- bijektiv, falls es injektiv und surjektiv ist, d. h. für jedes $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$

2) Ist $f: X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ bijektiv, dann bezeichnen wir die Umkehrfunktion mit $f^{-1}: Y \to X$, $f(x) \mapsto x$

3.4. Bemerkung: Ist $f$ nicht bijektiv, so können wir eventuell verbessern, indem wir sie

- surjektiv machen, indem wir $Y$ verkleinern
- injektiv machen, indem wir $X$ verkleinern

3.5. Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

ist weder injektiv noch surjektiv.
Verkleinern wir das Bild zu $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$

so wird sie surjektiv; verkleinern wir auch den Definitionsbereich zu $\mathbb{R}_0^+$,

$$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$

so wird sie auch injektiv. Als Abbildung von $\mathbb{R}_0^+$ nach $\mathbb{R}_0^+$ können wir sie dann umkehren zu der Wurzelfunktion

$$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

3.5. Definition: Für Funktionen

$$f: X \to Y \quad \text{und} \quad g: Y \to Z$$

definieren wir die Komposition $g \circ f$

$$g \circ f: X \to Z$$

durch $g \circ f(x) := g(f(x))$ für alle $x \in X$

**3.6. Bemerkung:** Ist $f : X \to Y$ bijektiv und $f^{-1} : Y \to X$ ihre Umkehrfunktion, so gilt

$$f^{-1} \circ f = id_X \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = id_Y$$

wobei $id_X : X \to X$ die identische Abbildung ist, d.h.

$$id_X(x) = x \qquad \text{für alle } x \in X.$$