4. Ungleichungen und Betrag für reelle Zahlen

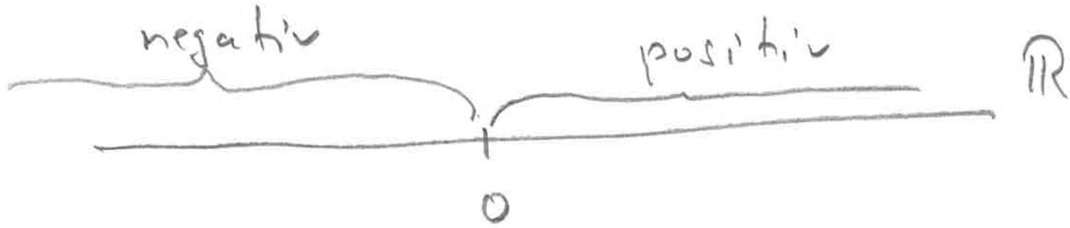
4.1. Notation: $\mathbb{R}$ hat eine Anordnung,

d.h. $a \in \mathbb{R}$ ist entweder

i) $a = 0$

ii) a positiv : $a > 0$

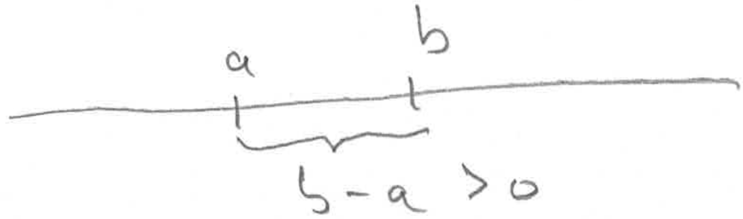
iii) a negativ : $a < 0$



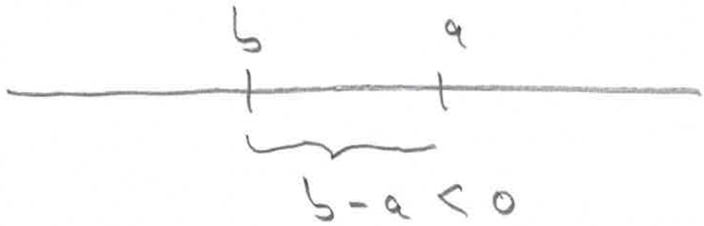
beachte: $a < 0 \iff -a > 0$

Wir können dann beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ vergleichen durch

$$a < b \;:\!\iff 0 < b - a$$



$a < b$



$b < a$

Wir schreiben auch

$a \leq b$ für : $a < b$ oder $a = b$

und setzen :

$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

und für $a \leq b$ schreiben wir Intervalle als

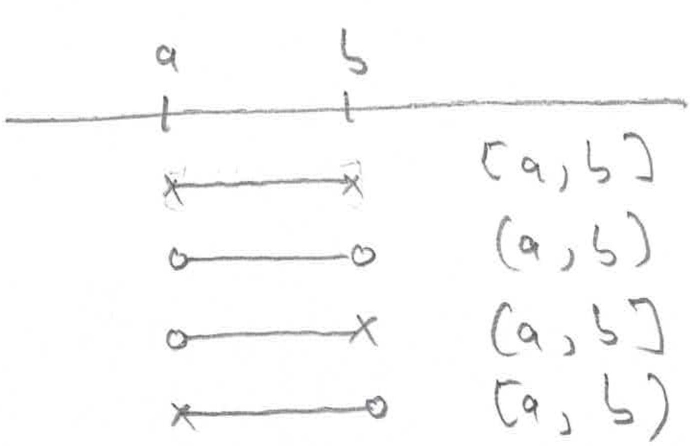
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a, b] :=$ $\qquad <\ \leq$

$[a, b)$ $\qquad \leq\ <$

d.h. $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$



Oft schreibt man auch $]a, b[$ statt (a, b)

4.2. Rechenregeln für Ungleichungen:

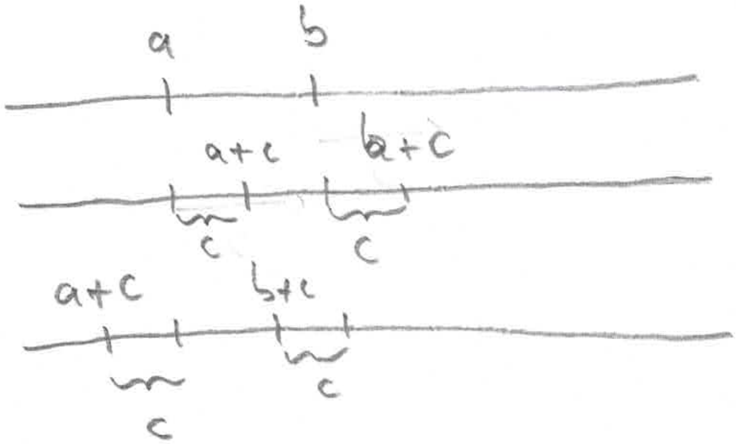
(1) $a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$

$\qquad\qquad\qquad\quad a \cdot b \geq 0$

(2) $a \geq b$ und $b \geq c \Rightarrow a \geq c$

(3) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

(4) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$



für $c > 0$

für $c < 0$

(5) $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

<u>aber:</u>

$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

Ungleichung dreht sich um

$3 \leq 4 \Rightarrow -3 \geq -4$

(6) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

(7) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

4.3. Bemerkungen: 1) (7) folgt z.B. aus (5), (6) so:

$$a > 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{1}{a} > 0$$

$$b > 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{1}{b} > 0$$

$$a < b \overset{(6)}{\Rightarrow} a \cdot \frac{1}{b} < b \cdot \frac{1}{b} = 1$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{1}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{b}}_{\frac{1}{b}} < \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}$$

2) Oft schätzt man so ab:

$$b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq a$$

"Weglassen von positiven Termen"

4.4. Beispiel: Lineare Terme sind einfacher zu kontrollieren als Potenzen, daher versucht man oft, Potenzen durch lineare Terme abzuschätzen

1) $(1+x)^2 \geq \, ?$

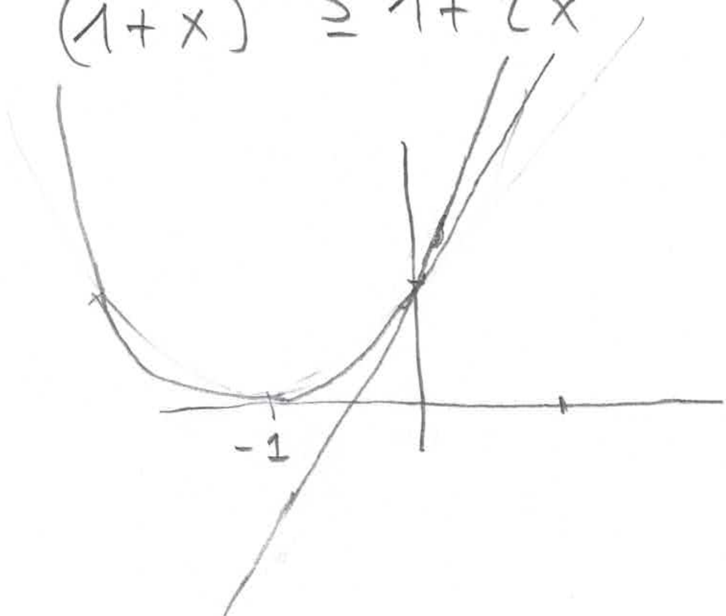
$$(1+x)^2 = (1+x)(1+x)$$

$$= 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{\text{immer } \geq 0}$$

$$\geq 1 + 2x$$

d. h. es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

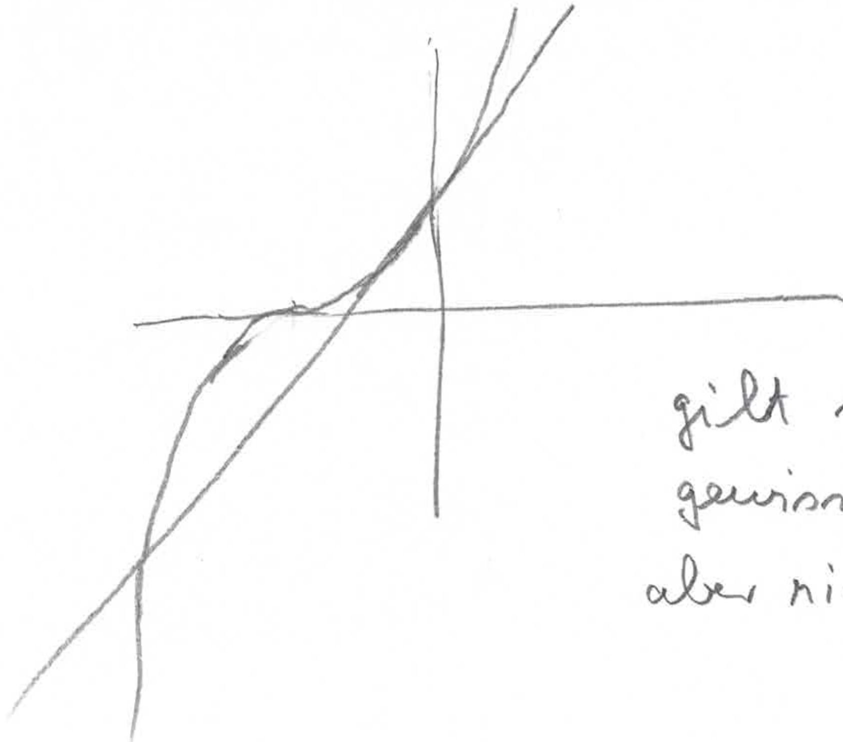
$$(1+x)^2 \geq 1 + 2x$$



2) $(1+x)^3 \geq \, ?$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + \underbrace{3x^2 + x^3}_{\substack{\geq 0 \text{ für } x \geq 0 \\ ? \quad x < 0}}$$

$$\geq 1 + 3x \quad \text{für } x \geq 0$$



gilt sogar für gewisse negative x, aber nicht überall

4.5. Bernoullische Ungleichung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: i) Dies kann mit vollständiger Induktion allgemein für $x \geq -1$ bewiesen werden

ii) Für $x \geq 0$ folgt es analog zu oben für alle n. Wir kommen bei der binomischen Formel nochmal darauf zurück.