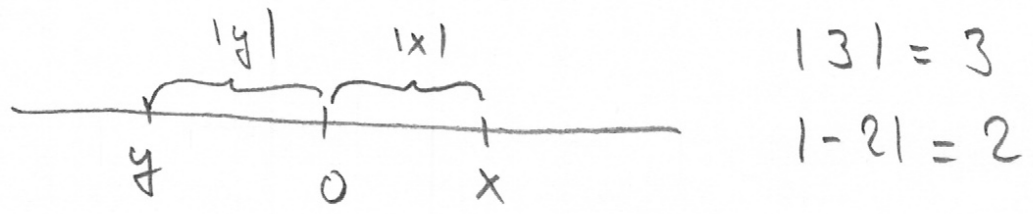


4.6. Notation: Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Betrag $|x|$ durch

(4-)

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

d.h. $|x|$ ist der positive Abstand von x von der Null.



4.7. Eigenschaften des Betrages:

- 1) $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- 2) $|x| = 0 \iff x = 0$
- 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
- 4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ — " —

(Dreiecksungleichung)

Beispiele: i) $|3 \cdot 4| = |3| \cdot |4| = 3 \cdot 4 = 12$
 $12 = |12|$
 $|3 \cdot (-4)| = |-12| = 12 = 3 \cdot 4 = |3| \cdot |-4|$

$$ii) |3 + 4| = |3| + |4| = 3 + 4 = 7 \quad (4-8)$$

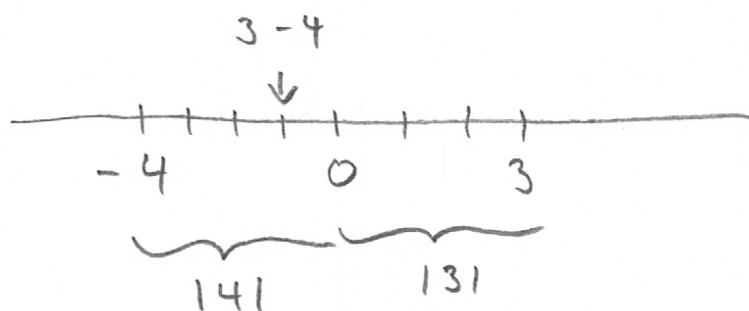
$$\begin{array}{c} \text{"} \\ 7 = |7| \end{array}$$

$$|3 + (-4)| = |-1| = 1$$

$$|3| + |-4| = 3 + 4 = 7$$

$$\text{also } |3 + (-4)| < |3| + |-4|$$

Im Dreiecksungleichung kann in speziellen Fällen auch Gleichheit gelten, im Allgemeinen haben wir aber Ungleichung



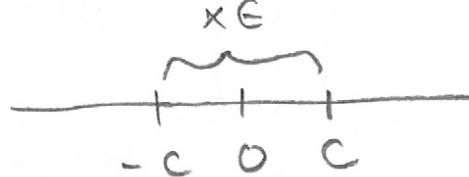
4.8. Bemerkung: Oft wollen wir den Betrag von Fehlern abschätzen; dabei interessiert nicht, ob wir größer oder kleiner als der echte Wert sind, sondern nur wie weit wir davon entfernt sind.

Beachte insbesondere: für $c \geq 0$ gilt:

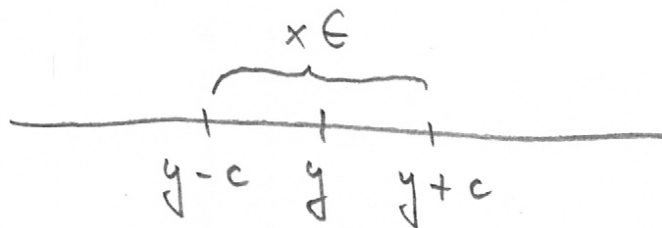
$$|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$$

$$|x-y| \leq c \iff -c \leq x-y \leq c \iff y-c \leq x \leq y+c$$

$$|x| \leq c$$



$$|x-y| \leq c$$



4.9. Beispiel: Betrachte unsere Approximation

$1+3x$ für $(1+x)^3$ von 4.4. Wie gut ist die? Bernoulli Ungleichung

sagt, dass $(1+x)^3 \geq 1+3x$ für alle $x \geq -1$, macht aber keine

Aussage über Fehler. Wir können

den für $x \in [-1, 1]$ (d.h. für $|x| \leq 1$)

z.B. so abschätzen:

$$|(1+x)^3 - (1+3x)|$$

$$= |1+3x+3x^2+x^3 - (1+3x)|$$

$$= |3x^2+x^3|$$

$$\leq |3x^2| + |x^3|$$

$$= 3 \cdot \underbrace{|x|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|x|}_{\leq 1} + \underbrace{|x|}_{\leq 1}^3$$

$$\leq 3 \cdot 1^2 + 1^3 = 4$$

also: für $|x| \leq 1$ gilt:

(4-1)

$$(1+3x) - 4 \leq (1+x)^3 \leq (1+3x) + 4$$

Für kleinere x können wir die Abschätzung natürlich verbessern.