# 5. Kombinatorik: Zählen von Möglichkeiten

**5.1 Bemerkung:** Oft hat man Probleme der Form: wieviel Möglichkeiten gibt es aus gegebener Menge Teilmenge auszuwählen – je nach Problem kann es auf die Reihenfolge ankommen oder nicht, manchmal sind die Objekte unterscheidbar, manchmal nicht. Für zwei dieser Probleme ist die Lösung so fundamental, dass wir dafür eigene Notationen einführen.

**5.2. Anzahl der Permutation:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, $n$ unterschiedliche Objekte (z.B. die Zahlen $1, 2, \dots, n$) zu ordnen? Z.B. in wievielen Arten kann ich die Zahlen $1, 2, 3$ ordnen?

| 1. Zahl | 2. Zahl | 3. Zahl | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 2 3 |
| | 3 | 2 | 1 3 2 |
| 2 | 1 | 3 | 2 1 3 |
| | 3 | 1 | 2 3 1 |
| 3 | 1 | 2 | 3 1 2 |
| | 2 | 1 | 3 2 1 |
| Möglichkeiten: 3 | × 2 | × 1 | = 6 |

Allgemein hat man $n$ Möglichkeiten für die Wahl des ersten Elements, dann $n-1$ Möglichkeiten für die Wahl des zweiten usw; insgesamt also

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten

5.3 Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$n! := n(n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

und sagen: $n$-Fakultät

Außerdem setzen wir

$$0! := 1$$

Beispiele:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

5.4. Satz: Die Anzahl der Permutationen (d.h. verschiedenen Anordnungen) einer Menge von $n$ Elementen ist $n!$

## 5.5. Auswahl von Teilmengen: Wieviel Möglichkeiten gibt es aus $n$ Objekten $k$ auszuwählen, wenn

i) es auf die Ordnung ankommt
(z.B. wieviele Möglichkeiten gibt es für Gold, Silber, Bronze bei 20 Läufern?

ii) es auf die Ordnung nicht ankommt
(z.B. wieviele Möglichkeiten gibt es für 6 aus 49 im Lotto)

i) Analog zu 5.2. gibt es
$n$ Möglichkeiten für erste Wahl
$n-1$ zweite
$\vdots$ $\vdots$
$n-k+1$ $k$-te Wahl

also insgesamt

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten

ii) Die Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, werden jetzt identifiziert, davon gibt es jeweils

$k!$, d. h. wir müssen das Resultat von i) durch $k!$ dividieren, somit haben wir

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$ Möglichkeiten

<u>5.6 Notation</u>: Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ setzen wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

wir sagen: "n über k" oder "k aus n" oder "n choose k"

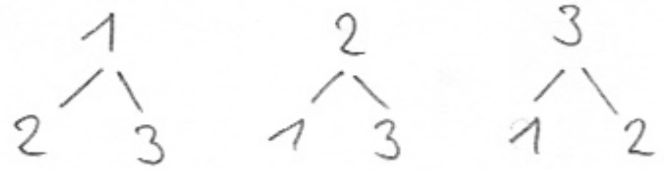
Beachte: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

allgemein: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

<u>5.7. Satz</u>: Die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

<u>5.8. Beispiel</u>: Wieviele zwei-elementige Teilmengen gibt es von $\{1, 2, 3\}$

Mit Beachtung der Reihenfolge können wir $3 \cdot 2 = 6$ geordnete Paare auswählen:




als Mengen stimmen davon aber je zwei überein

$$(1,2) \mathrel{\hat{=}} (2,1) \to \{1,2\}$$
$$(1,3) \mathrel{\hat{=}} (3,1) \to \{1,3\}$$
$$(2,3) \mathrel{\hat{=}} (3,2) \to \{2,3\}$$

also haben wir

$$3 = \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \binom{3}{2}$$

zweielementige Teilmengen.

<u>5.9. Binomischer Satz</u>: Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

also: $(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0$

$$= y + x$$

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^0 y^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^2 y^0$$

$$= y^2 + 2xy + x^2$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0$$

$$= y^3 + 3xy^2 + 3x^2 y + x^3$$

Beweis: Wenn wir

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{-Faktoren}}$$

ausmultiplizieren erhalten wir alle Möglichkeiten, bei denen wir aus jedem Faktor entweder ein $x$ oder ein $y$ auswählen. Für $x^k y^{n-k}$ müssen wir also aus $k$ Faktoren ein $x$ wählen, dafür gibt es nach 5.7. aber $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. □

5.10 Pascalsches Dreieck: Es gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}, \text{ denn}$$

∘ nachrechnen:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

oder Interpretation mit Teilmengen:

$\binom{n+1}{k+1} \hat{=}$ $(k+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, .., n+1\}$

$A \subset \{1, .., n+1\}$, $|A| = k+1$

$\Rightarrow$ ◦ $n+1 \in A \rightsquigarrow$ noch $k$ Elemente aus $\{1, .., n\}$ auszuwählen

$\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ Möglichkeiten

◦ $n+1 \notin A \rightsquigarrow$ $k+1$ Elemente aus $\{1, .., n\}$ auswählen

$\rightsquigarrow \binom{n}{k+1}$ Möglichkeiten

Damit kann man sich die $\binom{n}{k}$ rekursiv aus den "Randbedingungen" $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ erzeugen; dieses Schema heißt Pascalsches Dreieck (nach Blaise Pascal, 1623 – 1662)

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & 1 & & & & & & n=0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & n=1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & n=2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & n=3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & n=4 \\
 & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

5.11. Satz: Die Anzahl aller Teilmengen einer $n$-elementigen Menge ist $2^n$.

Beweis: 1) Dies ist gegeben indem wir über alle Möglichkeiten für $k$-elementige Teilmengen summieren, also

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n \quad \text{nach 5.9.}$$
$$= 2^n$$

2) andere Möglichkeit: um eine Teilmenge $A$ zu spezifizieren müssen wir für jedes der $n$ Elemente entscheiden, ob es in $A$ liegt oder nicht, somit $2^n$ Möglichkeiten

Beispiel: $A \subset \{1,2,3\}$

| $1 \in A$ | $2 \in A$ | $3 \in A$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| j | j | j | $\{1,2,3\}$ |
| j | j | n | $\{1,2\}$ |
| j | n | j | $\{1,3\}$ |
| j | n | n | $\{1\}$ |
| n | j | j | $\{2,3\}$ |
| n | j | n | $\{2\}$ |
| n | n | j | $\{3\}$ |
| n | n | n | $\emptyset$ |