6. Die komplexen Zahlen

6.1. Bemerkung: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entsprechen unserer "natürlichen" Vorstellung von Zahlen als das was wir messen können (z.B. Volumen, Masse, Temperatur, Längen oder Flächen etc). Warum sind wir damit nicht zufrieden und führen noch die "komplexen" Zahlen $\mathbb{C}$ ein? In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung. Es stellt sich heraus, dass man eine solche Lösung zu $\mathbb{R}$ dazutun kann, und alle algebraische Operationen und Gesetze weiterhin gelten. Wir nennen diese Lösung i, also gilt $i^2 = -1$

(Beachte: manchmal, z.B. in Elektrotechnik, wird i mit j bezeichnet)

Da wir weiterhin addieren und multipl wollen, haben wir also zumindest Zahlen der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

6.2. Definition: 1) Zahlen der Form

$z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißen

komplexe Zahlen; wir setzen

$\mathbb{C} := \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

Wir können sie addieren,

$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

und multiplizieren (gemäß $i^2 = -1$)

$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i y_2 + i y_1 x_2 + \underbrace{i^2}_{=-1} y_1 y_2$$

$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

2) Für $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ heißt

$x = \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z

$y = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z

3) $\bar{z} = x - iy$ heißt die komplex konjugierte

zu $z = x + iy$

beachte: $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$

6.3. Bemerkung: 1) Wir können natürlich auch subtrahieren,

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$

die Division ist nicht so offensichtlich, wir brauchen dazu $\frac{1}{z}$: für $z=x+iy$

gilt: $$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

beachte: $x^2+y^2=0$ gdw $x=0=y$
gdw $z=x+iy=0$

d.h. jedes $z\in\mathbb{C}$ mit $z\neq 0$ ist invertierbar

2) $\mathbb{C}$ hat somit die gleichen algebraischen Operationen (Addition, Multiplikation und ihre Inversen) und es gelten weiterhin alle üblichen Gesetze laut 1.3 (also Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetz).

3) Beachte, dass unsere Wahl von i nicht ganz eindeutig ist, auch $-i$ hat Eigenschaft, dass $(-i)^2=1$.
Wir haben die Freiheit, was wir i

und was $-i$ nennen. Alle Formeln müssen ihre Gültigkeit behalten, wenn wir i durch $-i$ ersetzen, oder allgemeiner wenn wir z durch $\bar{z}$ ersetzen.

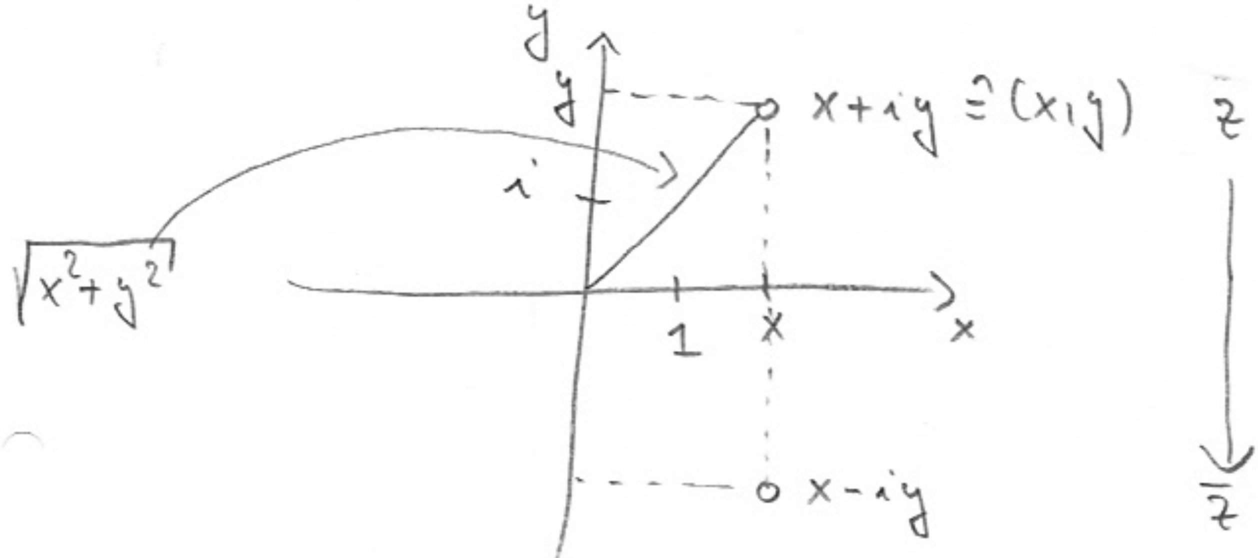
⊗

6.4. Darstellung von $\mathbb{C}$ als Zahlenebene:

Man kann $\mathbb{C}$ als Zahlenebene veranschaulichen, d. h.

$$\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$$

$$z = x+iy \hat{=} (x,y)$$



beachte: $z \mapsto \bar{z}$ entspricht dann Spiegelung an x-Achse

und $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ entspricht dem Abstand von z von der Null;

$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ist dann die Verallgemeinu

des Betrages von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$

6.4. Eigenschaften des komplex konjugierens

Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

i) $\overline{\overline{z}} = z$

ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iv) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ (für $z \neq 0$)

v) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

Beweis für (iii):

$$\overline{(x_1+\underbrace{iy_1}_{-iy_1})}\cdot\overline{(x_2+\underbrace{iy_2}_{-iy_2})} = \overline{(\underbrace{x_1x_2}_{x_1x_2}-\underbrace{y_1y_2}_{y_1y_2})+i(\underbrace{x_1y_2}_{-x_1y_2}+\underbrace{y_1x_2}_{-y_1x_2})}$$

6.5. Eigenschaften des Betrages:

Wir definieren für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ den **Betrag** $|z|$ durch

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Es gilt (vgl. 4.7):

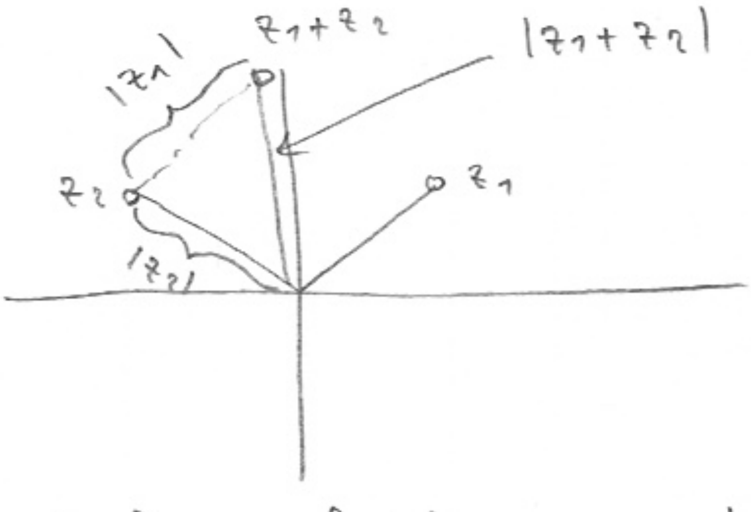
1) $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$

2) $|z| = 0 \iff z = 0$

3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ — " —

Dreiecksungleichung



Dreiecksungleichung sagt nun: Länge einer Seite im Dreieck ist kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten.

6.6. Relevanz der komplexen Zahlen:

1) Für die Mathematik ist $\mathbb{C}$ fundamental, da wir in $\mathbb{C}$ nicht nur die Gleichung $z^2 = -1$ lösen können, sondern alle polynomialen Gleichungen. Es gilt der

Fundamentalsatz der Algebra: Jede Gleichung der Form ($n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, .., a_n \in \mathbb{C}$)

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + .. + a_n z^n = 0$$

hat mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$.

2) Für die klassische Physik/Chemie ist es vorteilhaft mit komplexen Zahlen zu rechnen, da vieles dann eleganter, kompakter oder einsichtiger wird (insbesondere im Zusammenhang von Wellenphänomenen, Fourier-Zerlegung etc). Allerdings haben komplexe Zahlen hier keine "reale" Bedeutung. Auch elektrische Felder haben apriori nur reelle Zahlen als Werte.

3) In der Quantenwelt allerdings (also auch für Quantenchemie oder Quantencomputer) sind die komplexen Zahlen nicht nur ein mathematisches Konstrukt, sondern "real". Die Wellenfunktionen in der Quantenmechanik nehmen intrinsisch komplexe Werte an. Dies mag seltsam erscheinen, ist aber nicht zu leugnen!

6.7. Was ist e^z im komplexen?

In $\mathbb{R}$ macht a^x Sinn für jedes $a>0$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten nun die "natürliche" Exponentialfkt für $a = e$ $(= 2.71..)$ und fragen, ob wir e^z auch für $z \in \mathbb{C}$ definieren können, so dass alle gewohnten Regeln gelten. Wir haben für $z = s + it$ $(s, t \in \mathbb{R}$

$$e^z = e^{s+it} = e^s e^{it},$$

also müssen wir nur e^{it} verstehen.

Wir schreiben $e^{it} = x + iy$

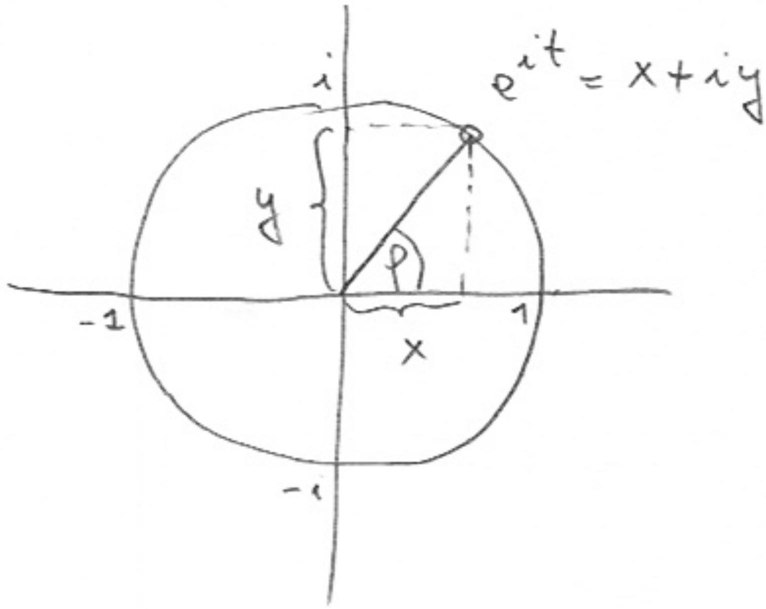
Dies sollte nach 6.3.(3) auch gelten, wenn wir i durch $-i$ ersetzen, also

$e^{-it} = x - iy$

Somit ist aber $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ und

$|e^{it}|^2 = e^{it} e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1$,

und somit liegt e^{it} in $\mathbb{C} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}^2$ auf dem Einheitskreis



Nach der Definition der trigonometrischen Funktionen ist daher

$x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$

Wir haben also

$e^{it} = \cos\varphi + i \sin\varphi$

Wenn wir φ in Bogenmaß messen (d.h. $\varphi = 2\pi \mathrel{\hat{=}} 360°$), dann gilt sogar $t = \varphi$:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Eulersche Forme
(Euler 1707-178

Für $\varphi = \pi$ folgt daraus

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

also die Eulersche Identität

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

<u>6.8. Bemerkung</u>: Im komplexen sind sin und cos also Realteil und Imaginärteil der Exponentialfkt. Dies ist nicht nur elegant und kompakt sondern gibt uns auch Einsichten:

1) Allgemein haben wir für $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$

$$e^{z\cdot t} = \underbrace{e^{a\cdot t}}_{\text{exponentielles Wachstum oder Dämpfung}} \underbrace{e^{ibt}}_{\cos(bt) + i\sin(bt)}$$

d.h. $e^{z\cdot t}$ beschreibt sowohl Dämpfung als auch Schwingungsverhalten in einheitlicher Weise; Dämpfung und Schwingung sind nur die reelle und die imaginäre Seite der gleichen Medaille.

2) Die (komplizierten) Additionsgesetze für Sinus und Kosinus folgen nun aus dem (einfachen) Additionsgesetz vom Potenzieren und der Multiplikation in $\mathbb{C}$:

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$\shortparallel$$

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$$

$$= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2$$

$$+ i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1)$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1$$

6.9. Darstellung in Polarkoordinaten:

In 6.7. haben wir gesehen, dass wir jede komplexe Zahl z mit $|z| = 1$ in der Form $e^{i\varphi}$ darstellen können. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn wir φ auf $[0, 2\pi)$ einschränken.

Beachte, dass

$$e^{i2\pi} = \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + i \underbrace{\sin 2\pi}_{0} = 1$$

und allgemein

$$e^{i(\varphi + 2\pi k)} = e^{i\varphi} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Allgemeines $z \in \mathbb{C}$ können wir dann schreiben als

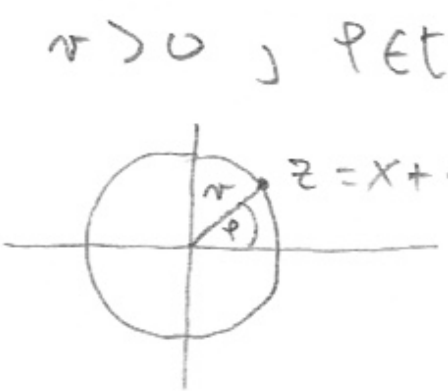
$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{wobei } r = |z|$$

Dies nennen wir Polarzerlegung von z und (r, φ) heißen <u>Polarkoordinaten</u> von z.
[r Betrag von z, φ heißt <u>Argument</u> von z]
Dabei wählen wir $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$

Für $z = 0$ ist $r = 0$ und φ ist nicht eindeutig bestimmt, da

$$0 = 0 \cdot e^{i\varphi} \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathbb{R}$$

Für $z \neq 0$ sind (r, φ) mit $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt.



$z = x + iy = r\, e^{i\varphi}$ wobei

$r = |z|$

$\tan \varphi = \frac{x}{y} \rightsquigarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{x}{y}$

In Polarkoordinaten ist die Multiplikation komplexer Zahlen recht einfach:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \underbrace{e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}}_{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r e^{i\varphi} \quad \text{mit}$$

$$r = r_1 r_2$$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (wobei wir 2π abziehen falls $\varphi_1 + \varphi_2 \geq 2\pi$)

6.10. Wurzeln von komplexen Zahlen:

Was ist $\sqrt{i}$?

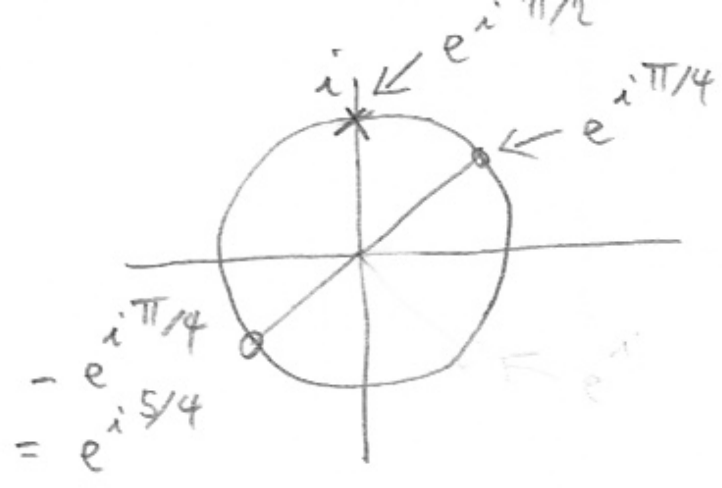
In der Polardarstellung wird dies einfach.

Schreibe $\sqrt{i} = r e^{i\varphi}$, dann

$$i = \sqrt{i}^2 = r^2 e^{i2\varphi} \overset{!}{=} 1 \cdot e^{i\pi/2}$$

also $r = 1$ und $\varphi = \pi/4$ oder

$r = 1$ und $\varphi = 5\pi/4$



$e^{i\pi/2}$
i
$e^{i\pi/4}$
$-e^{i\pi/4}$
$= e^{i5/4}$