7. Folgen und Reihen

7.1. Bemerkung: Die meisten interessanten Zahlen $x \in \mathbb{R}$ können wir nicht explizit angeben, sondern wir können sie nur besser und besser durch bekannte Zahlen x_n approximieren.

Beispiele: Wie beschreiben wir

- π
- e
- $\log_{10} 27$
- $\sin 13°$
- $\sqrt{2}$

?

Wir (oder unser Taschenrechner) produzie eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x konvergie

$$x = \sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$$

heißt eigentlich, wir beschreiben $\sqrt{2} = x$ als Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$x_1 = 1$

$x_2 = 1{,}4$

$x_3 = 1{,}41$

$x_4 = 1{,}414$

$x_5 = 1{,}4142$

$x_6 = 1{,}41421$

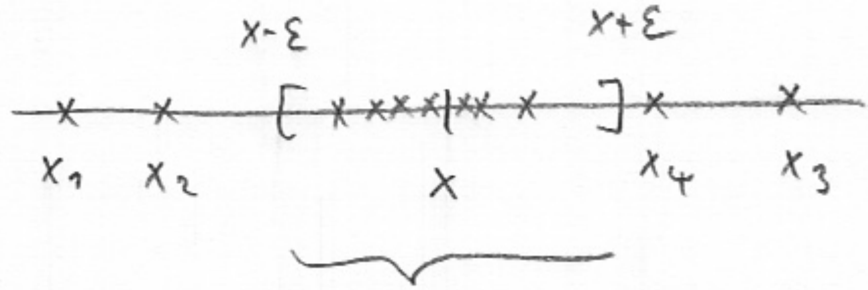
etc.

7.2. Definition: 1) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist offiziell eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

2) Wir sagen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x\in\mathbb{R}$ konvergiert, falls der Abstand $|x_n - x|$ für hinreichend großes n beliebig klein wird. Wir schreiben dann: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

[Formal: $x_n \to x$ falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|x_n - x| \leq \varepsilon$]



ab einem gewissen n (welches von ε abhängt) müssen alle x_n in der ε-Umgebung von x liegen

3) Oft sind Folgen in der Form von Reihen gegeben. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so betrachten wir

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{"Partialsumme der } (a_k)\text{"}$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man dann eine <u>Reihe</u>, und falls ihr Grenzwert existiert, so bezeichnen wir ihn mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

<u>7.3 Beispiele:</u> 1) Betrachte die Folge (x_n), die rekursiv definiert ist durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

Falls wir annehmen, dass x_n konvergiert (was man zeigen kann), dann muss $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ die Gleichung erfüllen:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right), \text{ also}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{x}, \quad \text{d.h.} \quad x^2 = 2$$

x_n sollte also gegen $\sqrt{2}$ konvergieren.

Setze z. B. $x_1 = 2$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right)}_{\frac{17}{6}} = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = 1{,}41421\ldots$$

2) Beachte dass bei negativem Startwert die Konvergenz gegen $-\sqrt{2}$ erfolgt:

$x_1 = -2$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(-2-1) = -1{,}5$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) = -1{,}41\overline{6}$$

etc

3) Es ist wichtig die Existenz des Grenzwertes zu wissen, bevor man ihn berechnet.

Betrachte z. B.

$$x_{n+1} = 2x_n - \frac{2}{x_n}$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$x = 2x - \frac{2}{x}, \quad \text{also} \quad x^2 = 2$$

Somit scheint diese Folge auch gegen $\sqrt{2}$ (oder $-\sqrt{2}$) zu konvergieren.

Nun starte die Iteration wieder mit

$x_1 = 2$

$\Rightarrow x_2 = 4 - \frac{2}{2} = 3$

$\Rightarrow x_3 = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} = 5,\bar{3}$

$\Rightarrow x_4 = \frac{32}{3} - \frac{3}{8} = 10,291\bar{6}$

Die x_n konvergieren also nicht, sondern laufen gegen ∞ (Unendlich)

7.4. Bemerkung: Es ist also wichtig, für Folgen / Reihen entscheiden zu können ob sie konvergieren. Dafür gibt es im wesentlichen folgende Möglichkeiten:

i) für einige einfache Folgen kann man die Konvergenz direkt nachprüfen

ii) kompliziertere Folgen kann man durch algebraische Operationen auf einfache Folgen zurückführen und Konvergenz ist mit algebraischen Operationen verträglich

iii) komplizierte Folgen kann man mit Hilfe einfacher Folgen abschätzen

7.5. Satz: 1) Seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{und} \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$$

Ist auch $y \neq 0$ und alle $y_n \neq 0$, dann gilt auch:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$$

2) Seien (x_n), (y_n) und (a_n) drei Folgen reeller Zahlen, für die gilt:

$$x_n \leq a_n \leq y_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sind (x_n) und (y_n) konvergent mit dem gleichen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x = y = \lim_{n\to\infty} y_n$ dann konvergiert auch (a_n) mit dem gleichen Grenzwert: $x = \lim_{n\to\infty} a_n = y$

7.6 Bemerkungen: 1) Für die Summe sagt dies:

falls x_n beliebig nahe bei x und
y_n — " — y liegt,

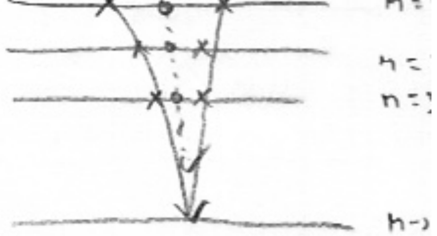
dann muss $x_n + y_n$ beliebig nahe bei $x+y$ liegen; dies folgt formal aus der Dreiecksungleichung:

$$|(x_n+y_n)-(x+y)| = |(x_n-x)+(y_n-y)|$$

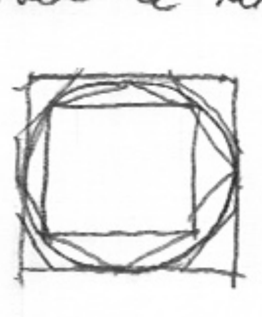
$$\leq \underbrace{|x_n-x|}+\underbrace{|y_n-y|}$$

dies wird beliebig klein für n hinreichend gross

2) heißt "Einschließungssatz" oder "Sandwich Theorem".



Geometrisches Beispiel ist die Berechnung der Fläche eines Kreises (also π, für Radius $=1$) durch einbeschriebene und umbeschriebene Vielecke



7.7. Beispiele für einfache (und wichtige!) Grenzwerte:

1) $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad , \text{d.h.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Da n beliebig groß wird, wird $\frac{1}{n}$ beliebig klein für n hinreichend groß.

[genauer: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ für $n > \frac{1}{\varepsilon}$

2) Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $|r| < 1$; dann

$$r^n \to 0 \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

[wie vorher muß $\left|\frac{1}{r^n}\right| = \frac{1}{|r|^n}$ beliebig groß werden; schreibe

$\frac{1}{|r|} = 1 + x \quad$, wobei $x > 0$

Dann folgt mit der Bernoullischen Ungleichung 4.5:

$$\frac{1}{|r|^n} = (1+x)^n \geq \underbrace{1+nx}_{\text{wird beliebig groß}} \quad]$$

3) geometrische Reihe: für $|r|<1$

betrachte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = r^n$

und zugehörige Reihe

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$$

Diese konvergiert und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

[denn wir haben eine konkrete Formel für x_n!

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad \text{(nach Satz 2.4)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-0}{1-r} = \frac{1}{1-r} \quad]$$