3) geometrische Reihe: für $|r|<1$ betrachte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = r^n$ und zugehörige Reihe

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$$

Diese konvergiert und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

[denn wir haben eine konkrete Formel für x_n:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad \text{(nach Satz 2.4)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-0}{1-r} = \frac{1}{1-r} \quad]$$

7.8 Beispiele: 1) Betrachte

$$x_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^2 + 15n + 4} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{15}{n} + \frac{4}{n^2}}$$

$\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{n} \to 0$

$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$

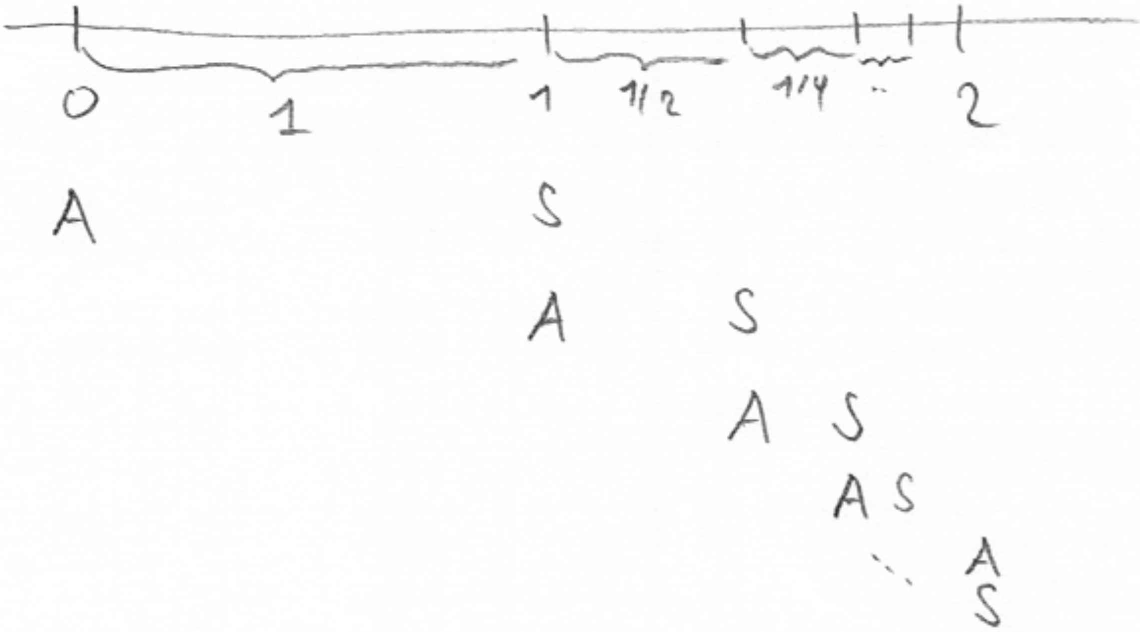
$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{2-0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}$$

2) Betrachte die geometrische Reihe mit $r = \frac{1}{2}$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

"Achill und die Schildkröte"



<u>7.9. Satz:</u> Seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten

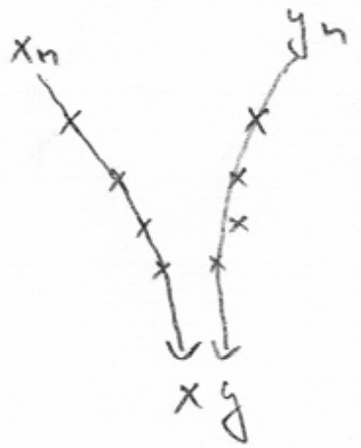
$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \text{und} \quad y = \lim_{n \to \infty} y_n$$

Falls ab einer Stelle $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n \leq y_n \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

dann geht die Ungleichung über auf die Grenzwerte, d. h. dann gilt auch

$x \leq y$.



Insbesondere folgt aus

$$0 \leq y_n \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

dann auch

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} y_n \quad , \text{ falls der Grenzwert existiert}$$

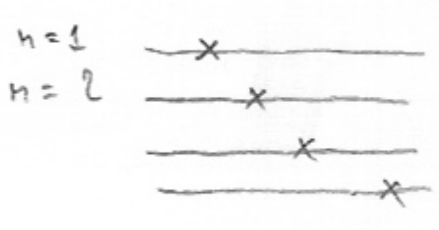
[setze oben: $x_n = 0$ für alle n,
dann ist auch $x = 0$]

<u>7.10 Beispiel:</u> Sei $y_n = \frac{1}{n} \geq 0$ für alle

dann ist auch $0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \geq 0$

Beachte auch, dass strikte Ungleichungen nicht unbedingt im Grenzwert überleben: aus $x_n < y_n$ für alle n folgt <u>nicht</u> dass $\lim x_n < \lim y_n$, sondern auch hier gilt im Allgemeinen nur "$\leq$".

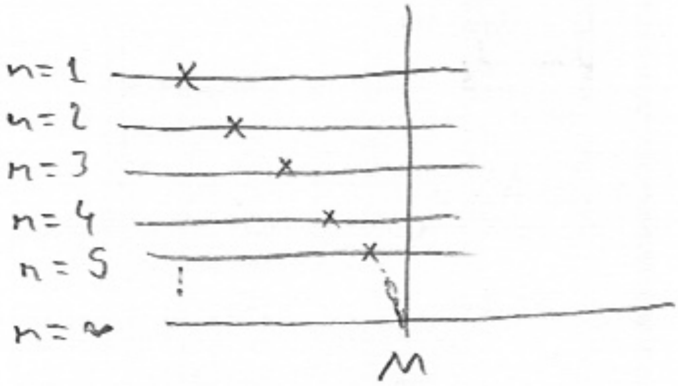
<u>7.11. Bemerkung:</u> Die algebraischen Formeln in 7.5 erlauben die Existenz eines Grenzwertes zu beweisen, indem man ihn berechnet. Es gibt aber (viele!) Situationen wo man den Grenzwert nicht konkret berechnen, aber trotzdem zeigen kann, dass er existiert. Typisches, und wichtigstes, Beispiel dafür sind monotone beschränkte Folgen: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, d.h. $x_{n+1} \geq x_n$ für alle n



dann könnte x_n auch gegen $+\infty$ laufen und zusätzlich nach oben beschränkt,

d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, so dass

$$x_n \le M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

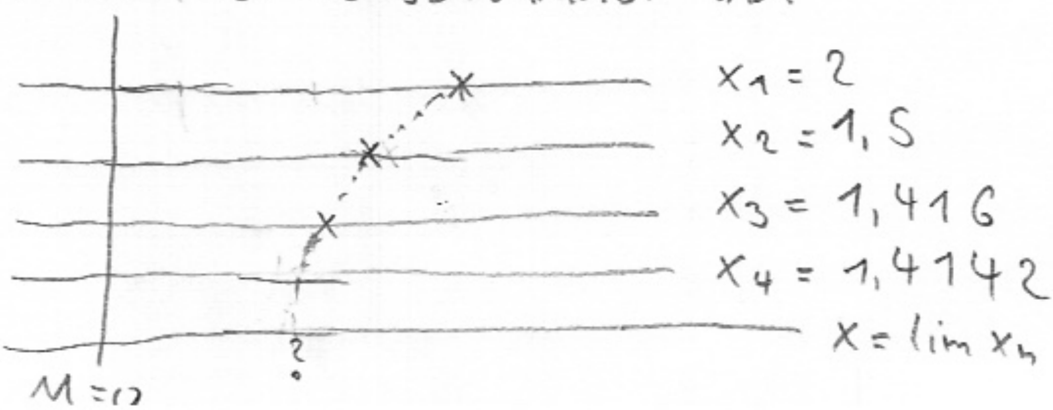


dann muss x_n gegen einen Grenzwert $x \le M$ konvergieren; dass es so einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ gibt, ist gerade die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$: alle Folgen, die konvergieren sollten, konvergieren auch

Betrachte z.B. die Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad \text{aus } 7.3.$$

Startet man von $x_1 = 2$, so liefert dies eine Folge rationaler Zahlen, $x_n \in \mathbb{Q}$, die monoton fällt und nach unten durch 0 beschränkt ist



d.h. die Folge sollte gegen ein x konvergieren. Im $\mathbb{Q}$ gibt es dieses x aber nicht. Der Übergang zu $\mathbb{R}$ behebt diesen Mangel, dort hat die Folge den Grenzwert $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

7.12. Satz: 1) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (d.h. $x_{n+1} \geq x_n$ für alle n) und nach oben beschränkt (d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{R}$ mit $x_n \leq M$ für alle n), dann ist (x_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq M$.

2) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend (d.h. $x_{n+1} \leq x_n$ für alle n) und nach unten beschränkt (d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{R}$ mit $x_n \geq M$ für alle n), dann ist (x_n) konvergent und $\lim x_n \geq M$.

7.13. Bemerkungen: 1) Wichtige Folgen sind Reihen $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, für die obige Kriterien spezielle Formen annehmen.

Typischerweise kann man für Reihen entscheiden, ob sie konvergieren, ohne dass man dafür ihren Grenzwert bestimmen muss (oder kann!)

2) Für Reihen $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ gibt es zwei Gründe, warum sie konvergieren:

i) die a_k gehen so schnell gegen Null, dass sie ohne Berücksichtigung ihres Vorzeichens eine konvergente Reihe geben, d.h. nicht nur

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergiert, sondern auch die Reihe der Beträge

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Solche Reihen heißen "absolut konvergent"; sie sind die Guten und mit ihnen kann man alles anstellen, was wir von endlichen Reihen gewohnt sind. Für uns wichtige Reihen sind von dieser Art!

ii) die a_k gehen gegen Null, aber nicht so schnell, dass sie absolut konvergieren; die Konvergenz kommt dann daher, dass die a_k verschiedene Vorzeichen haben und sich teilweise wegheben.
Solche Reihen heißen "bedingt konvergent" und die überlassen wir besser den Mathematikern!

iii) wenn die a_k nicht gegen Null gehen, dann kann die Reihe auch nicht konvergieren; diese Reihen sind uninteressant

7.14 Beispiele: 1) Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \mp \dots$$

ist absolut konvergent, da schon die Reihe der Beträge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

konvergiert. (Obige Reihe ist natürlich auch eine geometrische Reihe und konvergiert gegen $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

2) Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \ldots$$

konvergiert (gegen $\ln 2$), aber ihr absolutes Gegenstück

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

konvergiert nicht, sondern geht gegen $+\infty$.

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ konvergiert nicht absolut und ist anfällig z.B. gegenüber Umordnungen.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \ldots = \ln 2$$

ergibt durch Umordnung

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{\frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{\frac{1}{10} - \frac{1}{12}} \pm \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \ldots\right] = \frac{1}{2} \ln 2$$

Bedingt konvergente Reihen verändern beim Umordnen also ihren Wert!

Warum ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$?

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\substack{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} \\ = \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\substack{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} \\ = \frac{1}{2}}} + \underbrace{\cdots + \frac{1}{16}}_{\substack{8 \cdot \frac{1}{16} \\ = \frac{1}{2}}} +$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

also wird $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ beliebig groß!

<u>7.15 Satz:</u> 1) Eine absolut konvergierende Reihe konvergiert: falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

2) Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Majorante besitzt, dann konvergiert sie absolut:

Falls $|a_k| \le b_k$ für alle n und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

[Dies ist ein Spezialfall von 7.12, da $x_n = \sum_{k=1}^{n} |a_n|$ monoton wachsend ist und durch $M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nach oben beschränkt ist]

3) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Minorante besitzt, dann divergiert sie auch: Falls

$$0 \le b_k \le a_k \quad \text{für alle } n$$

und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

7.16. Notationen: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt

- konvergent, falls die Folge

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

einen Grenzwert besitzt

- absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist

- divergent, falls sie nicht konvergent ist

7.17. Bemerkung: 1) Absolut konvergente Reihen verhalten sich so, wie man es von endlichen Summen erwartet; insbesondere kann man ihre Terme auch umordnen.

2) Die Summe von zwei Reihen ist kein Problem, dafür braucht man kein Umsortieren und somit ist die Summe zweier konvergenter Reihen wieder konvergent.

3) Beim Produkt braucht man einiges Umsortieren um das wieder als Reihe zu erkennen, deshalb sollte man nur absolut konvergente Reihen multiplizieren.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) =$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{c_2} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

mit $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

<u>7.18. Satz:</u> 1) Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ beide konvergent, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und es gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

2) Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ beide absolut konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

absolut konvergent und es gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

<u>7.19. Bemerkung</u>: 1) Wir wollen jetzt das Majorantenkriterium aus 7.15 zu einem sehr nützlichen Werkzeug konkretisieren, indem wir unsere Reihen mit der geometrischen Reihe vergleichen.

Die geometrische Reihe ist von der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_n = r^n$

Somit hat sie die Eigenschaften

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{a_n} = r$$

Gilt eine dieser Eigenschaften asymptotisch für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so kann man sie mit der geometrischen Reihe vergleichen und somit über Konvergenz oder Divergenz entscheiden.

Die erste Eigenschaft liefert das Quotientenkriterium, die zweite das Wurzelkriterium.

2) Sei z.B. für ein $0 < r < 1$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r \quad \text{für alle } n$$

Dann ist

$$|a_n| \leq r|a_{n-1}| \leq r^2|a_{n-2}| \leq r^3|a_{n-2}| \leq \dots \leq r^n|a_0|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq |a_0| \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} r^k}_{\text{konvergiert}}$$

$$\overset{7.15}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent}$$

Gilt aber

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \text{für alle } n$$

dann ist

$$|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq |a_{n-2}| \geq \dots \geq |a_0|,$$

d.h. a_n konvergiert nicht gegen Null und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kann nicht konvergieren.

7.20 Satz (Quotientenkriterium):

Betrachte eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle n.

1) Falls es ein $0 < r < 1$ gibt und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

2) Falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann ist $\sum a_n$ divergent

3) Oft existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: q$$

Dann gilt folgendes für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

i) $q < 1$: absolut konvergent

ii) $q > 1$: divergent

iii) $q = 1$: keine Aussage möglich

7.21. Satz (Wurzelkriterium):

Betrachte eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1) Falls es ein $0 < r < 1$ gibt und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq r \qquad \text{für alle } n \geq 0,$$

dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

2) Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \qquad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

3) Oft existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: q$$

Dann gilt für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

i) $q<1$: absolut konvergent

ii) $q>1$: divergent

iii) $q=1$: keine Aussage möglich

7.22. Beispiel: 1) Betrachte $a_n = \frac{1}{n!}$

Dann gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

D.h. $q=0$ im Quotientenkriterium, und somit haben wir die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Das Wurzelkriterium liefert das Gleiche, allerdings muss man dafür wissen, was $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}_{=0}$ ist.