2) Betrachte $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$ (7-

Dann ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

und

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

also beide Mal $q = 1$ im Quotienten-kriterium; aber

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergiert}$$

und

$$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{konvergiert}$$

Für das Wurzelkriterium haben wir ebenso

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$$

Beide Kriterien helfen hier nicht weiter!

7.23. Beispiel: die Exponentialfunktion

In Erweiterung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ aus 7.22 betrachten wir jetzt für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ haben wir dann, mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$, im Quotientenkriterium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!\, x^{n+1}}{x^n\,(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $q = 0$ im Quotientenkriterium, und somit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$. Der Wert der Reihe hängt natürlich von x ab und wir setzen: $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Wir haben somit eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Ist das eine interessante Funkion? Ja !!!

Sie hat folgende wichtige Eigenschaft:

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k y^{n-k}}{n!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\overset{7.18}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \right)$$

$$= f(x) \cdot f(y)$$

f hat also genau die Eigenschaft von Exponentialfunktionen und wenn wir $e := f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ setzen, dann haben wir also

$$f(2) = f(1) \cdot f(1) = e \cdot e = e^2$$

und analog

$$f(n) = f(1)^n = e^n$$

und dann

$$f(\tfrac{1}{2}) \cdot f(\tfrac{1}{2}) = f(1) = e$$

$$\Rightarrow f(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{e} = e^{1/2}$$

und also auch

$$f(\tfrac{p}{q}) = e^{p/q}$$

und $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$ und

$$f(-1) \cdot f(1) = f(0) = 1,$$

also $f(-1) = \dfrac{1}{f(1)} = e^{-1}$

und letztendlich (durch "Stetigkeit") 7-30

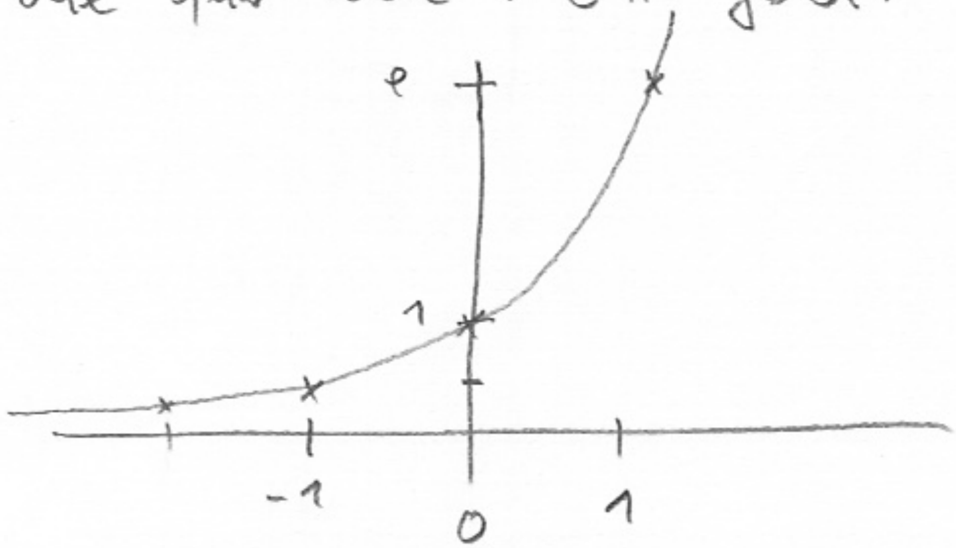
für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = e^x$$

Somit ist $f(x)$ die Exponentialfkt e^x und was wir hier gefunden haben ist eine nicht-triviale Reihenentwicklung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.



Beachte: alles was wir hier für Reihen in $\mathbb{R}$ gemacht haben, gilt auch für Reihen in $\mathbb{C}$ und wir haben auch für die komplexe Exponentialfkt

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

wobei die Reihe hier absolut konvergiert

d. h. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ (als Reihe in $\mathbb{R}$)

konvergiert absolut.

In 6.7. haben wir aber gesehen, dass

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$,

d.h.

$$\cos\varphi = \operatorname{Re}(e^{i\varphi}) \overset{6.4.}{=} \frac{e^{i\varphi} + \overline{e^{i\varphi}}}{2} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi)^n}{n!} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} \pm \cdots \right.$$

$$\left. + 1 - i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \frac{i^3\varphi}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} \pm \cdots \right\}$$

$$= 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} \pm \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

und analog

$$\sin \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots$$

7.24. Bemerkung: Wir erhalten hier also nicht-triviale Reihenentwicklungen für Fkten wie e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Wir wissen, dass die Reihen absolut konvergieren; wollen wir sie aber konkret benutzen, um Funktionswerte zu approximieren, so müssen wir den Fehler kontrollieren können.

z.B. $e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist die Eulersche Zahl. Man kann sie also approximieren durch

1

$1 + 1 = 2$

$1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5$

$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2.\overline{6}$

$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.708\overline{3}$ etc.

Aber woher wissen wir, wie gut die Approximation ist?

Wir können folgendermassen abschätzen:

$$\left| e - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right|$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \frac{1}{(m+3)!} + \dots$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \left[1 + \frac{1}{(m+2)} + \underbrace{\frac{1}{(m+2)(m+3)}}_{\leq \left(\frac{1}{m+2}\right)^2} + \dots \right]$$

$$\leq \frac{1}{(m+1)!} \underbrace{\left[1 + \frac{1}{m+2} + \left(\frac{1}{m+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{m+2}\right)^3 + \dots \right]}_{\text{geometrische Reihe für } r = \frac{1}{m+2}}$$

$$\leq \frac{1}{(m+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{m+2}} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+1}$$

m	$\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}$	Fehler $\leq \frac{1}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+1}$
1	2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$
2	2.5	$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{9}$
3	$2.\overline{6}$	$\frac{1}{24} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{96}$

Somit folgt

$m = 1: \quad 2 < e < 2{,}75$

$m = 2: \quad 2{,}5 < e < 2{,}7\overline{2}$

$m = 3: \quad 2{,}\overline{6} < e < 2{,}71875$

$m = 4: \quad 2{,}708 < e < 2{,}7183$

$e = 2{,}718281828 46..$