8. Stetige Funktionen

8.1 Bemerkung: 1) Naturgesetze sind meist durch funktionale Zusammenhänge zwischen Größen gegeben. Deshalb ist für uns das Verständnis der Eigenschaften von Funktionen wichtig:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto y = f(x)$

  y hängt von einer Variable x ab

  z.B.: Boylesches Gesetz für (ideale) Gase:

  $V = \frac{C_1}{p}$ $\quad$ V = Volumen, p = Druck $\quad$ C_1 = konstante

  $V = f(p)$ mit $f(p) = \frac{C_1}{p}$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto y = f(x_1, \dots, x_n)$

  y hängt von mehreren Variablen ab

  z.B.: die konstante C_1 im Boyleschen Gesetz hängt von Temperatur T und Anzahl der Mole n des Gases ab, und es gilt

$$V = \frac{nRT}{p} \quad \text{wobei } R = \text{absolute Konstante}$$

also $V = f(n, T, p)$

mit $f(n, T, p) = \frac{nRT}{p}$

Im MfN 1 betrachten wir nun Funktionen von einer Variable, in MfN 2 werden wir das auf mehrere Variable verallgemeinern

2) Die wichtigsten Eigenschaften von Funktionen sind

i) Stetigkeit von $y = f(x)$
eine kleine Änderung in x ergibt eine kleine Änderung in y

ii) Differenzierbarkeit von $y = f(x)$, als Verschärfung der Stetigkeit: die Änderung in y ist, für kleine x, proportional zu der Änderung in x (in erster Näherung), der Proportionalitätsfaktor ist die Ableitung $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

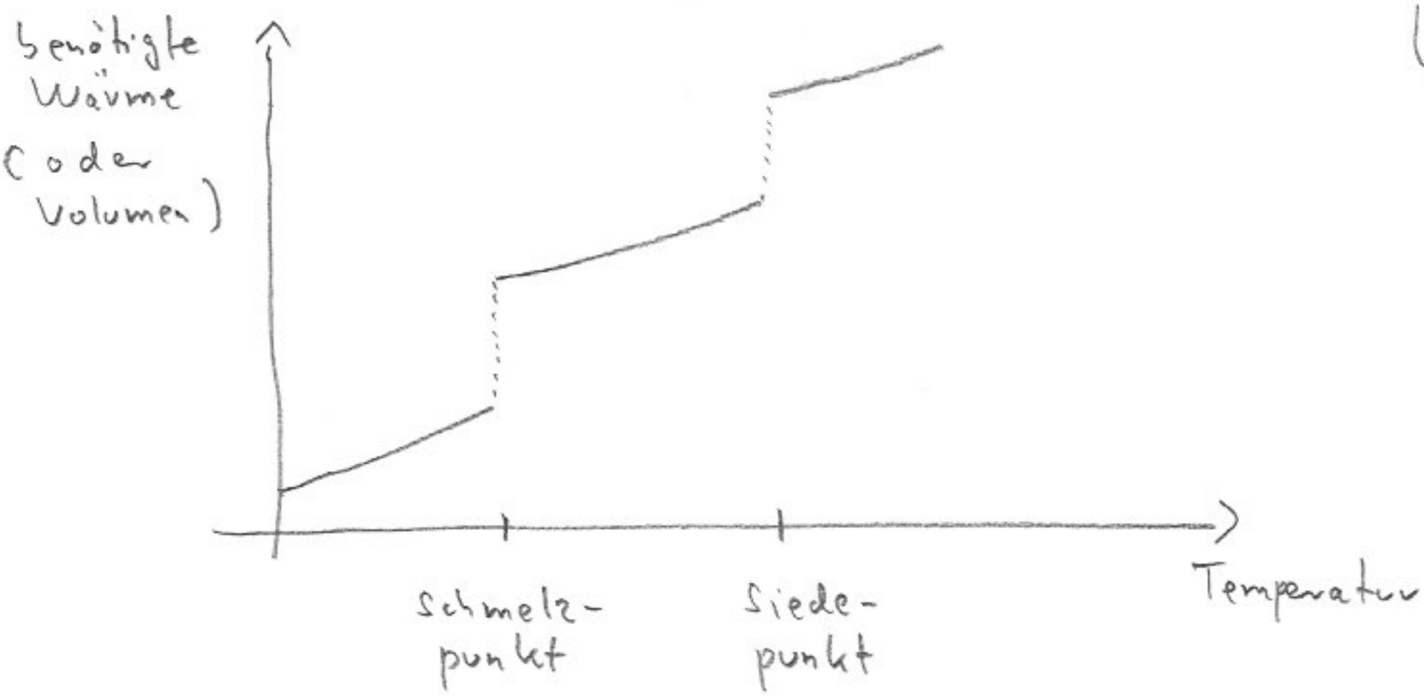
$f(x)$ kann in der Nähe von x durch eine lineare Funktion approximiert werden:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

3) Sind stetige und differenzierbare Abhängigkeiten der Idealzustand von Theorien, die wir gut beherrschen und berechnen können, so gibt es doch etliche physikalische und chemische Situationen, die Unstetigkeiten bzw. Nicht-Differenzierbarkeiten entsprechen. Dazu zählen insbesondere Phasenübergänge zwischen verschiedenen Aggregatzuständen, wie

- Schmelzen (fest → flüssig)
- Verdampfen (flüssig → gasförmig)

oder auch Umwandlung von Graphit zu Diamand unter hohem Druck.



4) Viele Funktionen setzen sich durch algebraische Operationen oder Komposition aus einfacheren Funktionen zusammen. Typischerweise bleibt dabei Stetigkeit und Diffbarkeit erhalten.

5) Wir betrachten hier zunächst Stetigkeit, Diffbarkeit kommt später.

<u>8.2. Notation:</u> 1) Seien Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$ und $g: D \to \mathbb{R}$

(mit gleichem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$) gegeben. Dann können wir daraus die folgenden neuen Funktionen bilden:

i) $f+g : D \to \mathbb{R}$

mit $(f+g)(x) := f(x) + f(x)$

für alle $x \in D$

ii) $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$

mit $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

für alle $x \in D$

iii) $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$

mit $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

für alle $x \in D$

[Als Spezialfall von (ii) haben wir dann auch für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Fkt αf:
$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$
und dann auch $f - g$]

2) Wie in 3.5. haben wir für $(D, W \subset \mathbb{R})$

$f : D \to W$ und $g : W \to \mathbb{R}$

die <u>Komposition</u> $g \circ f : D \to \mathbb{R}$, mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

<u>8.3. Definition:</u> Eine Funktion

$f : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subset \mathbb{R}$)

heißt <u>stetig im Punkt $x \in D$</u>, falls

für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D

(d.h. $x_n \in D$ für alle n) mit

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$

also: $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$

[dies ist die präzise Fassung von:

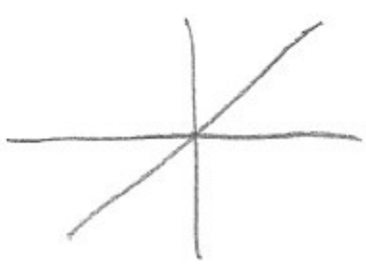
Ist x_n nahe bei x, dann muss

$f(x_n)$ nahe bei $f(x)$ sein!]

Ist f stetig in allen $x \in D$, dann

heißt f <u>stetig</u>.

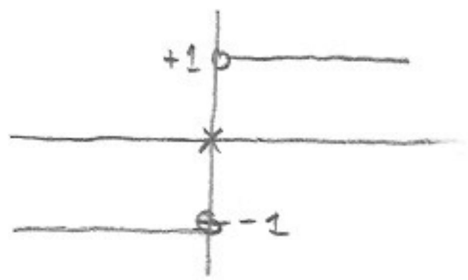
<u>8.4. Beispiele:</u> 1) $f(x) = x$ ist stetig



$x_n \to x \implies f(x_n) = x_n \to x = f(x)$ klar

2) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

d. h. $$f(x) = \begin{cases} -1 & & x < 0 \\ 0 & \text{falls} & x = 0 \\ +1 & & x > 0 \end{cases}$$



f ist unstetig an der Stelle $x = 0$:

Betrachte $x_n = \frac{1}{n}$; dann gilt

$x_n \to 0$, aber

$f(x_n) = 1 \to 1 \neq f(0) = 0$

Selbst wenn wir $f(0) = 1$ definieren, können wir die Unstetigkeit nicht beseitigen, da dann immer noch

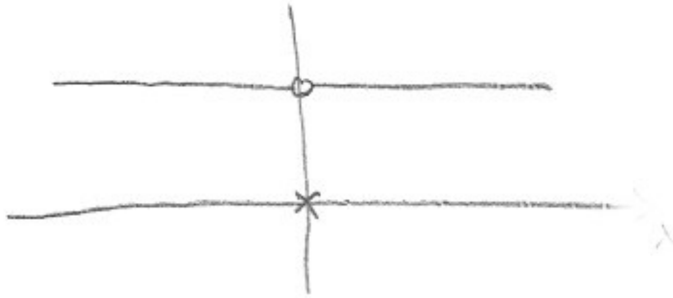
$-\frac{1}{n} \to 0$, aber $\underbrace{f(-\frac{1}{n})}_{= -1} \to -1 \neq f(0)$

3) Betrachte stattdessen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{falls }} x = 0 \end{cases}$$

d. h.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{falls }} x = 0 \end{cases}$$



dann ist f auch bei $x = 0$ unstetig, aber dies ist nun nicht unabänderlich, sondern liegt an unserer "falschen" Wahl für $f(0)$. Setzen wir auch $f(0) = 1$, so wird f überall stetig.

8.4. Satz: 1) Seien die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ stetig. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(y) \neq 0$ für alle $y \in D$) in $x \in D$ stetig.

2) Betrachte (mit $D, W \subset \mathbb{R}$)

$f: D \to W$ und $g: W \to \mathbb{R}$.

Ist f in x stetig und g in $f(x)$ stetig, dann ist die Komposition $g \circ f$ in x stetig

3) Also: Summe, Produkt, Quotient, Komposition von stetigen Funktionen ist stetig.

[Teil (1) ist direkte Folgerung aus entsprechenden Eigenschaften von Folgen (siehe 7.5); z.B.

f in x stetig: $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

g in x stetig: $x_n \to x \Rightarrow g(x_n) \to g(x)$

Dann gilt aber:

$$(f+g)(x_n) = \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{f(x_n)} + \underset{\substack{\downarrow \\ g(x)}}{g(x_n)} \to \underset{\substack{\| \\ (f+g)(x)}}{f(x) + g(x)}$$

Teil (2) folgt aus der Def. von Komposition:

f in x stetig: $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

g in $f(x)$ stetig: $y_n \to f(x) \Rightarrow g(y_n) \to g(f(x))$

Dann gilt:

$$x_n \to x \xRightarrow[\text{stetig}]{f} \underbrace{f(x_n)}_{=:y_n} \to f(x)$$

$$\xRightarrow[\text{stetig}]{g} \underbrace{g(y_n)}_{\substack{=g(f(x_n))\\ =g\circ f(x_n)}} \to \underbrace{g(f(x))}_{g\circ f(x)}$$

]

<u>8.5. Beispiele:</u> 1) Aus (1) folgt dann, dass alle polynomialen Funktionen

$$f(x) = p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$(\text{mit } a_0, a_1, .., a_n \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N})$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

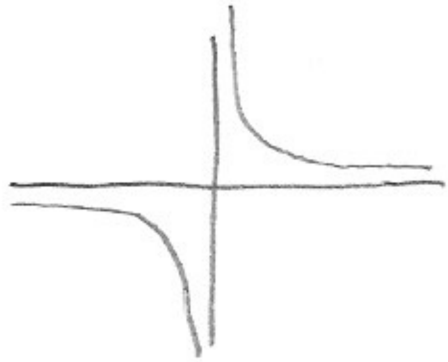
2) Ebenso sind alle rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

(mit $m, n \in \mathbb{N}$, $a_0, .., a_n, b_0, ..., b_m \in \mathbb{R}$) auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ stetig

Beachte, dass eine Stelle x mit $q(x)=0$

- eine Polstelle von $f(x)$ sein kann, wie z.B. für $f(x)=\frac{1}{x}$



wo man f an der Stelle $x=0$ nicht sinnvoll definieren kann

- nur scheinbar ein Pol sein kann, da es vom Zähler aufgehoben werden kann und man f an der Stelle x "stetig" fortsetzen kann; wie z.B.

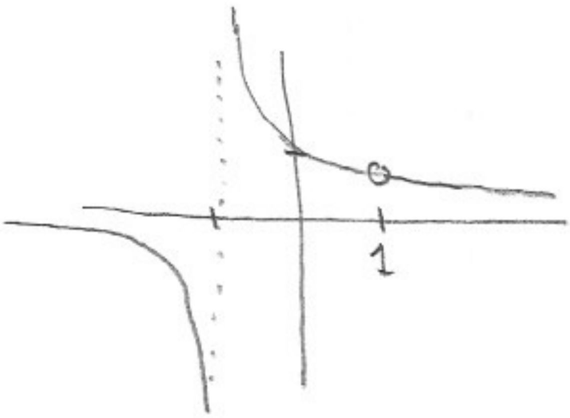
für $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ an der Stelle $x=1$.

Wir haben nämlich

$$f(x)=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1},$$ also

sollten wir $f(1)=\frac{1}{2}$ setzen.

(An der Stelle $x=-1$ haben wir einen echten Pol.)



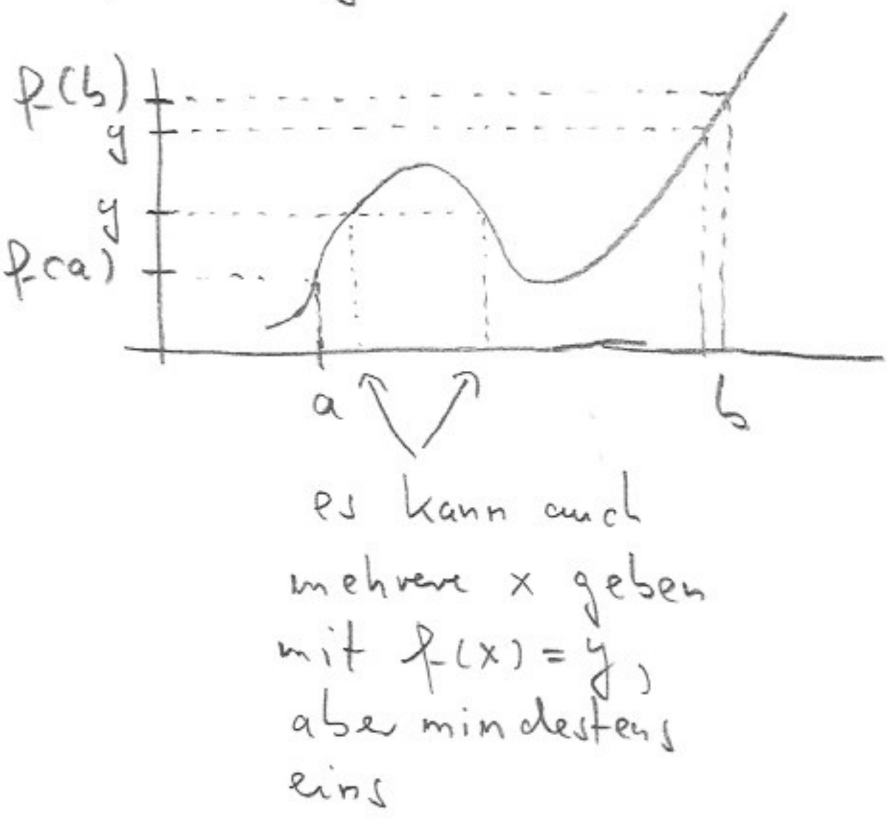
8.6 Satz (Zwischenwertsatz): Sei

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$) und sei

$$f(a) \leq y \leq f(b).$$

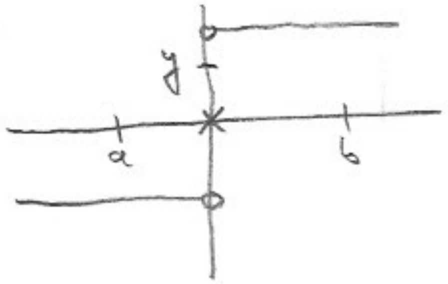
Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit

$f(x) = y$.



8.7. Beispiele: 1) Für unstetige f muss sowas nicht gelten.

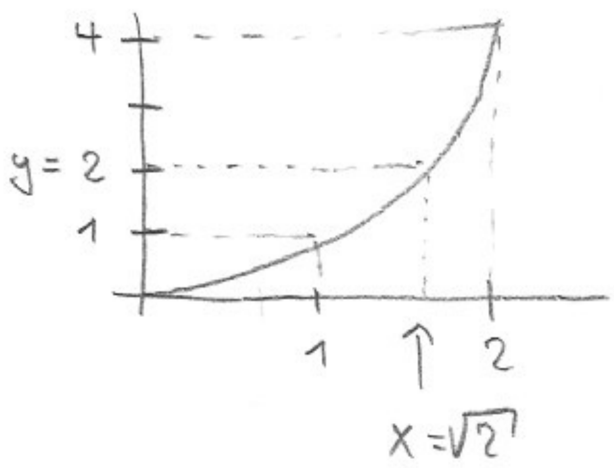
z.B.



$f(a) = -1$
$f(b) = 1$
aber es gibt kein x mit $f(x) = \frac{1}{2}$

2) Betrachte z.B. $f(x) = x^2$ und

$a = 1, b = 2, y = 2$

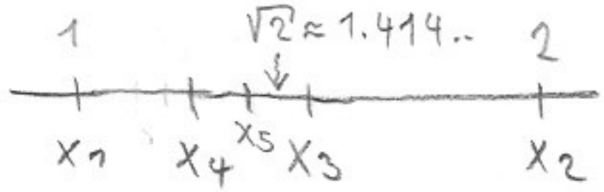


Man kann dieses $x = \sqrt{2}$ z.B. durch folgende naive Approximation finden.

Starte mit $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.5$

$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} = 1.25$

$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = 1.375$



$x_1^2 \quad < \quad < \; < \; > \quad > \quad 2$ etc.

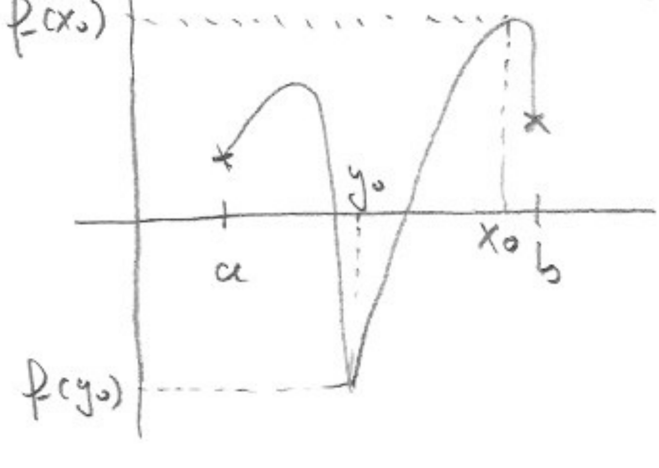
Wir halbieren unsere Intervalle und nehmen immer dasjenige $[a, b]$ wo $a^2 < 2$ und $b^2 > 2$ ist.

Diese ineinandergeschachtelten Intervalle werden immer kleiner und konvergieren gegen $\sqrt{2}$.

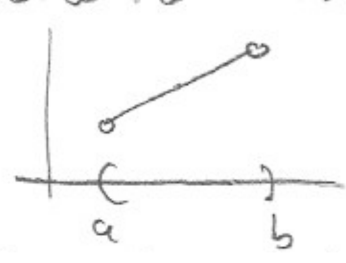
Beachte, dass unser Algorithmus von 7.3. auch eine solche Intervallschachtelung von $\sqrt{2}$ gibt, allerdings ist die Wahl der x_n dort nicht ganz so naiv und konvergiert auch schneller gegen $\sqrt{2}$.

<u>8.8. Satz:</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein Maximum und ein Minimum auf $[a,b]$, d.h. es gibt $x_0, y_0 \in [a,b]$ so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0) \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$



[beachte: x_0, y_0 können auch auf Rand liegen, also z.B. $x_0 = a$; deshalb ist abgeschlossenes Intervall wichtig:



]