9. Spezielle Funktionen

9.1. Bemerkung: Neben polynomialen und rationalen Funktionen sind die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen (d.h. Sinus, Kosinus, Tangens), sowie deren Umkehrfunktionen die wichtigsten Funktionen. Eine wesentliche Frage dabei ist die nach der Stetigkeit und der Existenz der Umkehrfunktion. Wir wollen dies am Beispiel der Exponentialfunktion und ihrer Umkehrfkt, dem Logarithmus, genauer untersuchen.

9.2 Satz: Die Exponentialfunktion

$$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

ist stetig.

[Dies kann man folgendermaßen sehen:

- exp ist bei $x = 0$ stetig:

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

und $\exp(x)$ ist, für kleine $|x|$, beliebig nahe bei 1; dies folgt z.B. aus der Abschätzung in Aufgabe 1, Blatt 7 (für $m=0$):

$$|e^x - 1| \leq 2 \frac{|x|}{1!} = 2|x| \quad \text{für } |x| < 1$$

- exp ist bei beliebigem $x \in \mathbb{R}$ stetig:

  dazu betrachte $x_n \to x$, dann ist

$$\exp(x_n) = \exp[(x_n - x) + x]$$

$$= \exp(x_n - x) \cdot \exp(x) \quad (\text{vgl. } 7.23: \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y))$$

$$x_n - x \to x - x = 0$$

$$\Rightarrow \exp(x_n - x) \to \exp(0) = 1$$

da exp bei 0 stetig

$$\Rightarrow \exp(x_n) \to 1 \cdot \exp(x) = \exp(x) \quad]$$

<u>9.3. Bemerkung:</u> 1) Wir wollen nun untersuchen, ob exp eine Umkehrfunktion besitzt (d.h. wir fragen, ob die Gleichung $\exp(y) = x$ für (beliebige?) x eine eindeutige Lösung y besitzt)?

2) Für die Existenz einer Umkehrfkt muss exp bijektiv sein. Als Abbildung $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dies nicht der Fall, da $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

für $x \geq 0$ ist das klar aus der Reihenentwicklung $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

für $x < 0$ sehen wir das aus

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0 \text{ , da dann } -x > 0$$

Deshalb schränken wir den Wertebereich ein und betrachten exp als Funktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

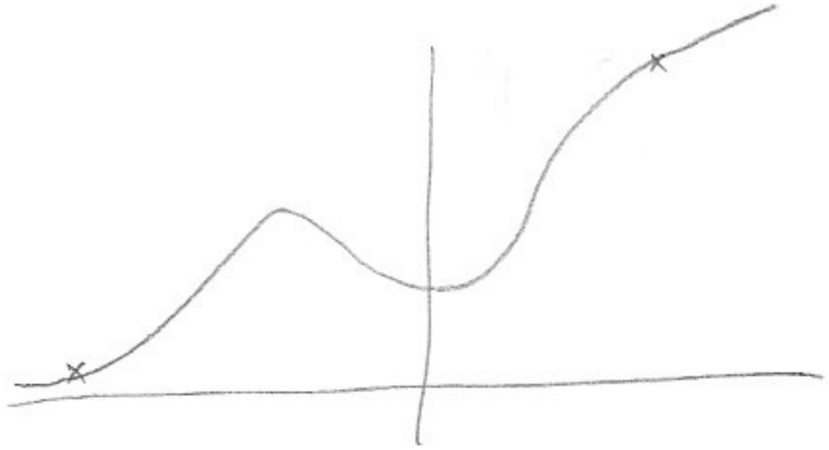
3) Da $\exp(x) \geqslant 1 + x$ für $x \geq 0$,

nimmt $\exp(x)$ beliebig große Werte (für großes x) und damit auch beliebig kleine positive Werte (für großes $-x$) an.

Somit wissen wir

Somit nimmt exp alle positiven Werte mindestens einmal an und ist surjektiv.

4) exp könnte noch so aussehen



Dies kann nicht sein, da exp streng monoton wachsend ist, d.h.

$$x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$$

da: $x < y \Rightarrow 0 < y - x$

$$\Rightarrow \underbrace{\exp(y-x)}_{\exp(y)\cdot\underbrace{\exp(-x)}_{\frac{1}{\exp(x)}}} \geq 1 + (y-x) > 1$$

$$\Rightarrow \exp(y) > \exp(x)$$

Als streng wachsende Fkt ist exp dann auch injektiv, also ist $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv und besitzt somit eine Umkehrfunktion.

9.4. Definition: Die Umkehrfunktion von $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ wird mit

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(x)$$

bezeichnet und heißt (natürlicher) **Logarithmus**.

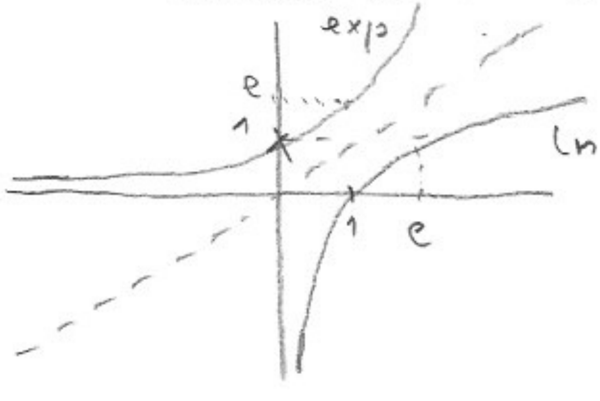
$\ln(x)$ ist also für $x > 0$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$e^y = \exp(y) = x$$

Für $x < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung.

9.5. Eigenschaften des Logarithmus:

1) Als Umkehrfunktion einer stetigen, streng monotonen Funktion ist ln auch stetig und streng monoton. Der Graph von ln ergibt sich aus dem von exp durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.



$\exp(0) = 1$

$\ln(1) = 0$

$\exp(1) = e$

$\ln(e) = 1$

2) exp(x) geht für großes x sehr schnell gegen ∞

exp(−x) ———— " ———— 0

ln(x) —— " —— sehr langsam gegen ∞

3) Die wichtigste Eigenschaft der exp-Fkt,

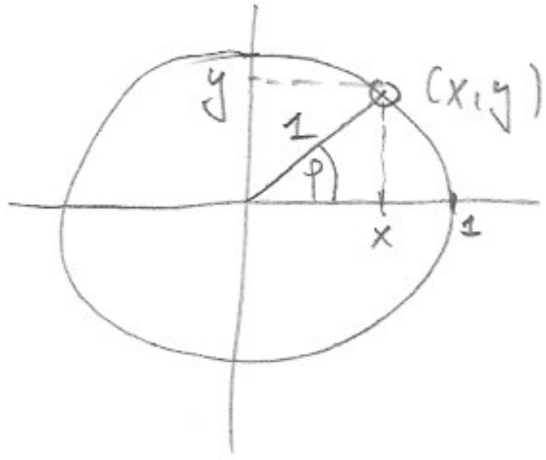
$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

liest sich für die ln-Fkt so:

$$\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y \quad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

(vgl. auch 1.6)

<u>9.5. Definition</u>: Die trigonometrischen Fkten werden geometrisch durch Verhältnisse von Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken definiert. Durch Normierung kann man die Hypothenuse auf 1 normieren und betrachtet damit Punkte auf dem Einheitskreis. Man definiert



$\sin\varphi = y$ <u>Sinus</u>

$\cos\varphi = x$ <u>Kosinus</u>

$\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{y}{x}$ <u>Tangens</u>

$\cot\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \dfrac{x}{y}$ <u>Kotangens</u>

Der Winkel φ wird dabei im Bogenmaß gemessen.

9.6. Eigenschaften der trigonometrischen Fkten:

1) Im 6.7. haben wir gesehen, dass sin und cos Imaginär- und Realteil der komplexen Exp-Fkt sind und damit erhält man aus der Reihenentwicklung von exp (im komplexen) auch folgende Reihenentwicklungen für sin und cos:

$$\sin \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(vgl. 7.23)

$$\cos \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

Für den tan und cot haben wir im Augenblick noch keine konkrete Reihenentwicklung

2) Da die exp-Fkt auch im komplexen stetig ist, erhält man daraus leicht die Stetigkeit von sin und cos. Dann sind tan und cot als Quotient zweier stetiger Funktionen auch stetig.

3) Aus der geometrischen Definition ist klar, dass $|\sin \varphi| \leq 1$ und $|\cos \varphi| \leq 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$

also haben wir

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

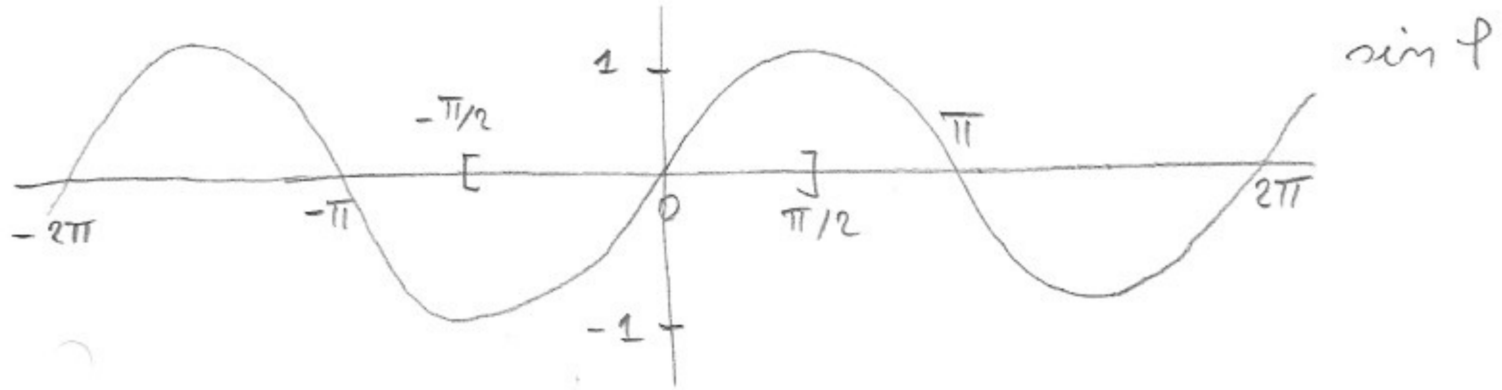
$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

Da $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

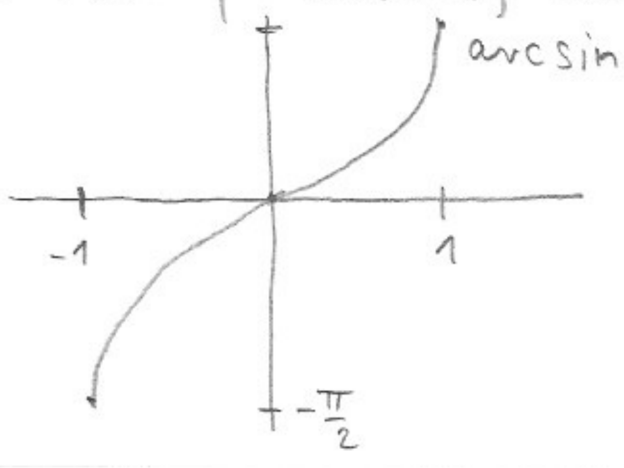
ist sin nach dem Zwischenwertsatz surjektiv auf dem Wertebereich $[-1, 1]$.

Allerdings nicht injektiv, da es 2π-periodisch ist, d.h.

$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin \varphi$



Wenn wir sin auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ einschränken, dann wird es dort injektiv und hat eine Umkehrfunktion, den <u>Arkussinus</u> arcsin

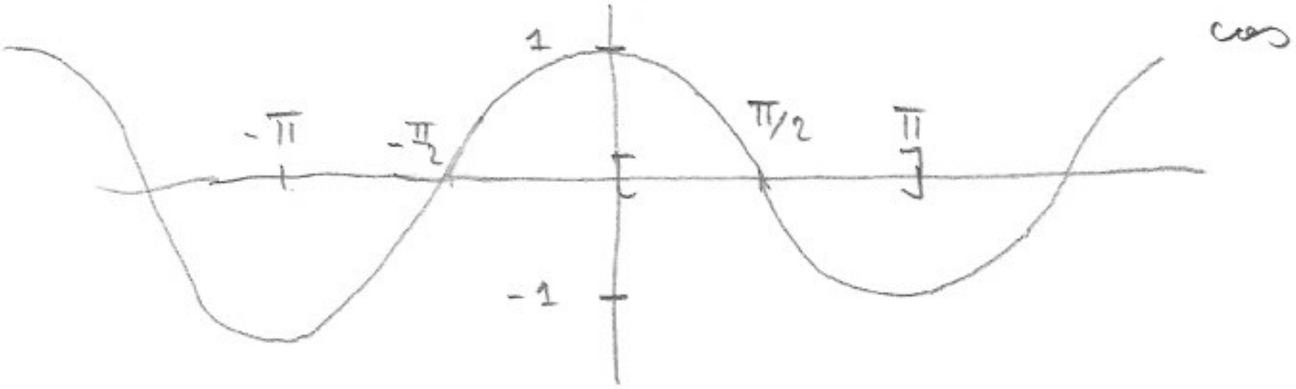


$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

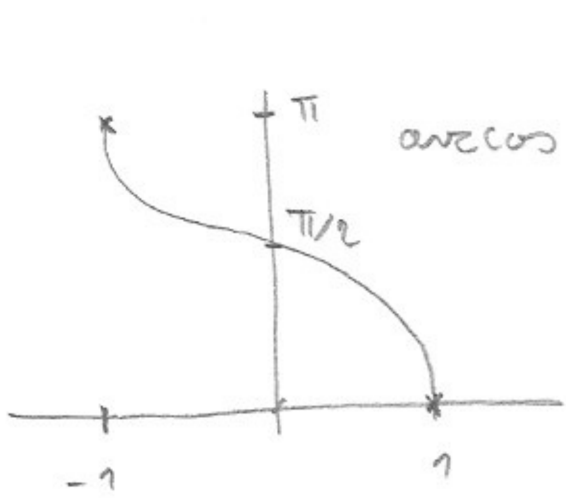
$\overset{\shortparallel}{\sin^{-1}}$

4) Analog hat der cos eingeschränkt auf $[0, \pi]$ eine Umkehrfunktion, den <u>Arkuskosinus</u> arccos

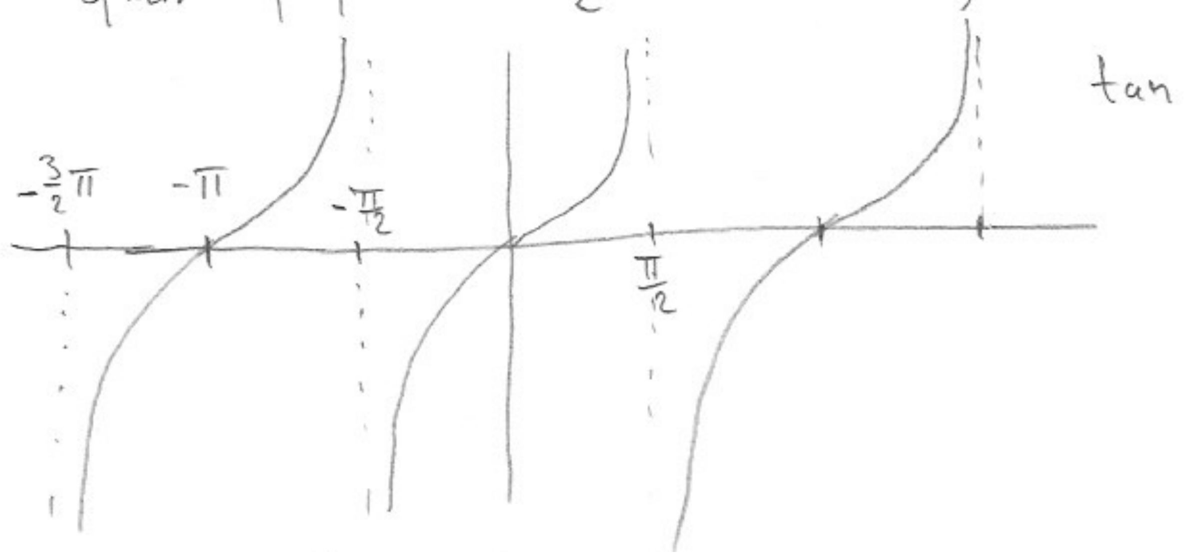


$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$

$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$



5) Der Tangens $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ ist nur dort definiert, wo $\cos\varphi \neq 0$, also für $\varphi \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

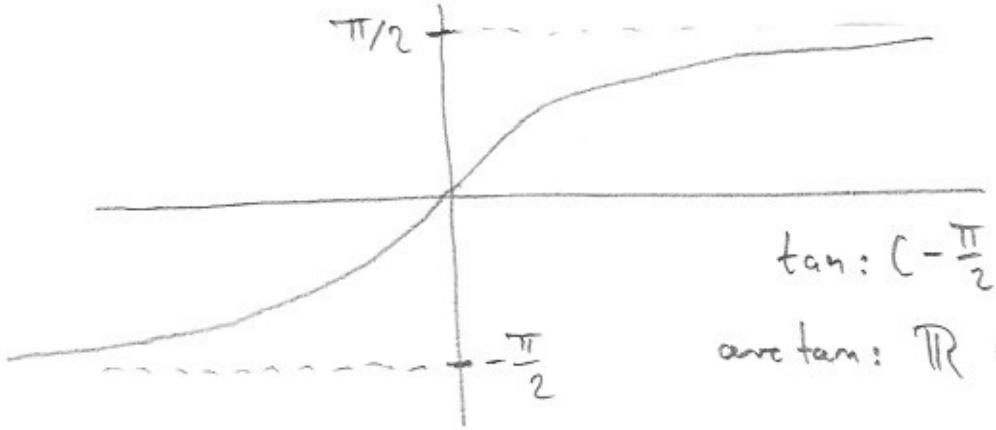


$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv

und hat somit eine Umkehrfunktion,

den <u>Arkustangens</u>

$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

<u>9.7 Satz:</u> Die trigonometrischen Funktionen

sin, cos, tan und ihre Umkehrfunktionen

$\arcsin : [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arccos : [-1, +1] \to [0, \pi]$

$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

sind stetig