UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Klausur zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Dienstag, 15.9.2020, 10:00 – 13:00 Uhr

Willkommen zur Klausur *Mathematik für Naturwissenschaftler I*

- Die Klausur beginnt um 10:00 Uhr (*st*) und endet um 13:00 Uhr (*st*).
- Bitte tragen Sie Ihre persönlichen Daten auf diesem Blatt ein und **unterschreiben Sie** dieses.
- Für diese Klausur sind **außer einem (beidseitig) handbeschriebenen Blatt (DIN A4)**, das am Ende mit der Klausur abgegeben werden muss, **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zur Kontrolle auf den Tisch.
- Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen auf die ausgegebenen Aufgabenblätter. Sollte Ihnen der Platz nicht reichen, benutzen Sie bitte die Rückseiten der Blätter und machen Sie kenntlich, um welche Aufgaben es sich jeweils handelt.
- Beschriften Sie bitte auch alle Schmierblätter mit Ihrem Namen und geben Sie diese mit ab.
- Bitte schreiben Sie weder in rot noch mit Bleistift.

Viel Erfolg!

Nachname: Vorname:

Geburtsdatum: Matrikelnummer:

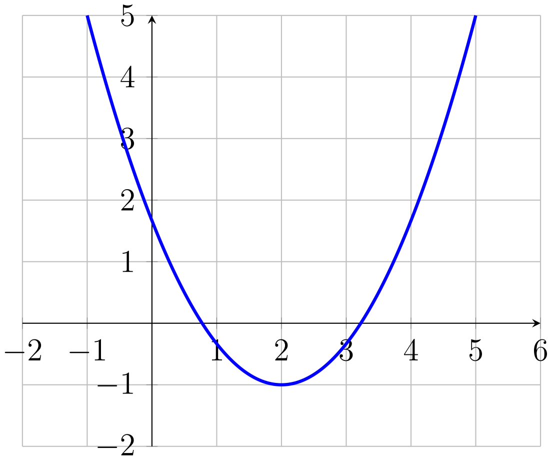
Semesterzahl: Studiengang:

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 4 Punkte)**.** Die nachfolgende Grafik zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2}{3}(x-2)^2 - 1.$$



(a) Geben Sie den Wertebereich von f an.

(b) Geben Sie ein möglichst großes Intervall I an, auf dem die Funktion f injektiv ist.

(c) Bestimmen Sie das Bild $f(I)$ für das in (b) gefundene Intervall I.

(d) Begründen Sie, warum $f : I \to f(I)$ bijektiv ist, und bestimmen Sie anschließend die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$.

Aufgabe 2 (3 + 4 + 3 Punkte)**.**

(a) Gegeben seien die Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} \qquad \text{und} \qquad B := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

$$A \cap B, \qquad A \cup B \qquad \text{und} \qquad B \setminus A.$$

(b) Gegeben seien die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 := 2 - 3\mathrm{i} \qquad \text{und} \qquad z_2 := 1 + 2\mathrm{i}.$$

Berechnen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil von

$$z_1 + z_2 \qquad \text{und} \qquad \frac{z_1}{z_2}.$$

(c) Es bezeichne log den Logarithmus zur Basis 10. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\log\left(\sqrt{2}\cdot\frac{10^{-7}}{10^{-5}}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{5}\right)$$

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^3 = \mathrm{e}^{-x}$$

mindestens eine Lösung $x \in [0, 1]$ besitzt.

(b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die die Differentialgleichung

$$f'(x) = -2f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

löst und deren Ableitung die Bedingung $f'(0) = -4$ erfüllt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Diskutieren Sie die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2},$$

d.h., bestimmen Sie

- die Nullstellen sowie die Extrem- und Wendepunkte von f (sofern diese existieren),
- die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
- sowie die Monotonie- und Krümmungsintervalle.

Fertigen Sie anschließend eine Skizze des Graphen von f an.

Aufgabe 5 (5 + 5 Punkte)**.** Wir betrachten die Funktion

$$f:\ (-\infty, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Bestätigen Sie mithilfe der Lagrange-Restglieddarstellung, dass f durch das in (a) bestimmte Taylorpolynom auf dem Intervall $[-\frac{1}{4}, 0]$ bis auf einen Fehler von höchstens $\frac{1}{16} = 0{,}0625$ approximiert wird.

Aufgabe 6 (5 + 5 Punkte)**.**

(a) Untersuchen Sie die folgenden beiden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2(n^2+1)} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)}.$$

(b) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2}$$

Aufgabe 7 (5 + 5 Punkte)**.** Wir betrachten die rationale Funktion f, die gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x+2)}.$$

(a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von f.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

Aufgabe 8 (2 + 4 + 4 Punkte)**.** Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int (x^3 - 2x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$