8. Konvergenz von nichtkommutativen Potenzreihen

Simon Jäger

26.06.2014

0.1 Definition *1. Für ein $Z^1, Z^2 \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$, mit $m \in \mathbb{N}$, definieren wir die Verknüpfung $\odot_s$ indem wir Z^1 und Z^2 in Blockdarstellung,*

$$Z^1 = (A^1_{ij})_{1\leq i,j\leq m},$$

$$Z^2 = (A^2_{ij})_{1\leq i,j\leq m},$$

mit $A^1_{ij}, A^2_{ij} \in \mathcal{V}^{s\times s}$, schreiben und dann ebenso das Produkt $Z^1 \odot_s Z^2$ in Blockform darstellen mit

$$(Z^1 \odot_s Z^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A^1_{ik} \otimes A^2_{kj}.$$

Weiter definieren wir

$$Z^{\odot_s l} = \underbrace{Z \odot_s Z \odot_s ... \odot_s Z}_{l-mal}.$$

2. Wir definieren die Tensoralgebra $\boldsymbol{T}(\mathcal{V}^{s\times s}) = \bigoplus_{l=1}^{\infty} (\mathcal{V}^{s\times s})^{\otimes l}$, wobei wir mit $(\mathcal{V}^{s\times s})^{\otimes l}$ das l-fache Tensorprodukt bezeichnen. Eine lineare Abbildung

$$f : \boldsymbol{T}(\mathcal{V}^{s\times s}) \to \mathcal{W}^{s\times s}$$

ist gegeben durch l-lineare Abbildungen

$$f_l : \left(\mathcal{V}^{s\times s}\right)^l \to \mathcal{W}^{s\times s}.$$

Ist nun $Z \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$, so wirkt f_l auf jeden Eintrag der $m \times m$ Matrix mit Einträgen in $(\mathcal{V}^{s\times s})^{\otimes l}$. Dies definiert eine Abbildung

$$f_l^{(m,\ldots,m)} = f_l^m : \prod_{i=1}^{l} (\mathcal{V}^{s\times s})^{m\times m} \to \mathcal{W}^{sm\times sm},$$

welche $Z^{\odot_s l} f_l = f_l^m(\underbrace{Z, ..., Z}_{l-mal})$ erfüllt.

3. Ein formaler Ausdruck der Form

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \right)^{\odot_s l} f_l \tag{8.1}$$

heißt nk Potenzreihe. Dabei ist $Y \in \mathcal{V}^{s\times s}$ und $X \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$ und $m \in \mathbb{N}$. Die f_l sind l-lineare Abbildungen mit

$$f_l : \left(\mathcal{V}^{s\times s}\right)^l \to \mathcal{W}^{s\times s},$$

die die Relationen

$$
\begin{aligned}
&Sf_0 - f_0 S = f_1(SY - YS), && (4.4)\\
&Sf_l(Z^1, ..., Z^l) - f_l(SZ^1, Z^2, ..., Z^l) = f_{l+1}(SY - YS, Z^1, ...Z^l), && (4.5)\\
&f_l(Z^1, ..., Z^{j-1}, Z^j S, Z^{j+1}, ..., Z^l) - f_l(Z^1, ..., Z^j, SZ^{j+1}, Z^{j+2}, ..., Z^l) &&\\
&= f_{l+1}(Z^1, ..., Z^j, SY - YS, Z^{j+1}, ..., Z^l) \text{ und} && (4.6)\\
&f_l(Z^1, ..., Z^l S) - f_l(Z^1, Z^2, ..., Z^l)S = f_{l+1}(Z^1, ...Z^l, SY - YS), && (4.7)
\end{aligned}
$$

für beliebige $l \in \mathbb{N}$, *für beliebige* $Z^i \in \mathcal{V}^{s\times s}$ *mit* $1 \leq i \leq l$ *und für beliebige* $S \in M_s(\mathbb{C})$, *erfüllen.*

0.2 Lemma *Sei* $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{C}^{s\tilde{m}\times sm}$, $X \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$, $\tilde{X} \in \mathcal{V}^{s\tilde{m}\times s\tilde{m}}$ *und* $Y \in \mathcal{V}^{s\times s}$. *Und die* f_l *wie oben, die die Relationen (4.4)-(4.7) erfüllen. Dann gilt*

$$
S\left(\sum_{l=0}^{N}\left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\right)^{\odot_s l} f_l\right) - \left(\sum_{l=0}^{N}\left(\tilde{X} - \bigoplus_{\alpha=1}^{\tilde{m}} Y\right)^{\odot_s l} f_l\right) S =
$$

$$
\sum_{k=0}^{N}\left(\left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{\tilde{m}} Y\right)^{\odot_s k} \odot_s \left(S\left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\right) - \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{\tilde{m}} Y\right) S\right) \odot_s \left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\right)^{\odot_s (N-k)}\right) f_{N+1}. \quad (1)
$$

0.3 Satz *Sei* $\Omega \subseteq \mathcal{V}_{nc}$ *eine nk Menge und* $\mathcal{W}$ *ein Banachraum mit zulässigem System von Normen. Sei weiter*

$$
f : \Omega \to \mathcal{W}_{nc}
$$

eine Gâteaux-differenzierbare (G-differenzierbare) nk Funktion und $Y \in \Omega_s$. *Angenommen es gibt eine endlich offene Menge* $\Gamma \subseteq \Omega$ *mit* $\bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y \in \Gamma_{sm}$ *und*

$$
f(X) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(X - \bigoplus_{\alpha=1}^{m} Y\right)^{\odot_s l} f_l,
$$

mit l*-linearen*

$$
f_l : (\mathcal{V}^{s\times s})^l \to \mathcal{W}^{s\times s}
$$

und für beliebige $X \in \Gamma_{sm}$. *Dann gilt*

$$
f_l = \Delta_R^l f(\underbrace{Y, ..., Y}_{l+1\text{-mal}}).
$$

Insbesondere erfüllen die f_l *die Gleichungen (4.4)-(4.7).*

0.4 Lemma *Sei* $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{V}^{sm\times sm}$, $B \in \mathcal{V}^{sm\times s\tilde{m}}$ *und* $C \in \mathcal{V}^{s\tilde{m}\times s\tilde{m}}$, *dann gilt*

$$
\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{\odot_s l} = \begin{bmatrix} A^{\odot_s l} & \sum_{k=0}^{l-1} A^{\odot_s k} \odot_s B \odot_s C^{\odot_s (l-k-1)} \\ 0 & C^{\odot_s l} \end{bmatrix}. \quad (2)
$$