Proposition (Homogenität)
Sei f eine nichtkommutative Funktion auf einer nichtkommutativen Menge Ω. Ist Ω rechts bzw. links zulässig dann gilt

$$\Delta_R f(X,Y)(rZ) = r\Delta_R f(X,Y)(Z)$$

bzw.

$$\Delta_L f(X,Y)(rZ) = r\Delta_L f(X,Y)(Z)$$

für jedes $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathscr{M}^{n\times m}$ bzw. $Z \in \mathscr{M}^{m\times n}$ und $r \in \mathscr{R}$. Das heißt nichts Anderes als dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} Z &\mapsto \Delta_R f(X,Y)(Z) \\ \mathscr{M}^{n\times m} &\to \mathscr{N}^{n\times m} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} Z &\mapsto \Delta_L f(X,Y)(Z) \\ \mathscr{M}^{m\times n} &\to \mathscr{N}^{m\times n} \end{aligned}$$

im Sinne der Operatoren-Theorie *homogen* sind.

Proposition (Additivität)
Seien f, Ω wie oben, dann gilt: Ist Ω rechts bzw. links zulässig dann sind $\Delta_R f(X,Y)(Z)$ bzw. $\Delta_L f(X,Y)(Z)$ additive Operatoren. Das heißt, ist Ω rechts bzw. links zulässig und sind $X \in \Omega_n$ und $Y \in \Omega_m$ $Z, Z' \in \mathscr{M}^{n\times m}$ bzw. $Z, Z' \in \mathscr{M}^{n\times m}$ so gilt

$$\Delta_R f(X,Y)(Z+Z') = \Delta_R f(X,Y)(Z) + \Delta_R f(X,Y)(Z')$$

bzw.

$$\Delta_L f(X,Y)(Z+Z') = \Delta_L f(X,Y)(Z) + \Delta_L f(X,Y)(Z')$$

Proposition (Eigenschaften Transposition)
Sei $\Omega \subseteq \mathscr{M}_{nc}$ und f nichtkommutativ.

1. ist Ω nichkommutativ, so gilt dies auch für

$$\Omega^T := \{X^T | X \in \Omega\} \subseteq \mathscr{M}_{nc}$$

2. Ist $f : \Omega \to \mathscr{N}_{nc}$ nichtkommutativ, dann gilt dies auch für

$$\begin{aligned} f^T : \Omega^T &\to \mathscr{N}_{nc} \\ X &\mapsto f^T(X) \end{aligned}$$

wobei $f^T(X) := f(X^T)^T$.

3. Ist Ω rechts bzw. links zulässig, so ist Ω^T links bzw. rechts zulässig und es gilt
$$\Delta_R f^T(X,Y)(Z) = (\Delta_L f(X^T,Y^T)(Z^T))^T$$
bzw.
$$\Delta_L f^T(X,Y)(Z) = (\Delta_R f(X^T,Y^T)(Z^T))^T$$

Proposition (Rechenregeln)

1. Sei $f : \mathscr{M}_{nc} \to \mathscr{N}_{nc}$ konstant, das heißt es gelte $f(X) = c \cdot I_n$ für alle $X \in \Omega_n$, $n \in \mathbb{N}$ und ein $c \in \mathscr{N}$ dann gilt
$$\Delta_R f(X,Y)(Z) = 0 = \Delta_R f(X,Y)(Z)$$
für alle $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$ und $Z \in \mathscr{M}^{n\times m}$ bzw. $Z \in \mathscr{M}^{m\times n}$

2. Sind $f, g : \Omega \to \mathscr{N}_{nc}$, Ω rechts bzw. links zulässig und $a, b \in \mathscr{R}$ so gilt
$$\Delta_R(af + bg)(X,Y)(Z) = a\Delta_R f(X,Y)(Z) + b\Delta_R g(X,Y)(Z)$$
bzw.
$$\Delta_L(af + bg)(X,Y)(Z) = a\Delta_L f(X,Y)(Z) + b\Delta_L f(X,Y)(Z)$$

3. Sei $l : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ eine $\mathscr{R}$-lineare Abbildung. Wir erweitern l zu einer lineare Abbildung von $\mathscr{M}^{n\times m}$ nach $\mathscr{N}^{n\times m}$ durch $l([\mu_{ij}]) = [l(\mu_{ij})]$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist l eine nichtkommutative Funktion von $\mathscr{M}_{nc}$ nach $\mathscr{N}_{nc}$ und $\Delta_R l(X,Y)(Z) = l(Z)$ und ebenfalls $\Delta_L l(X,Y)(Z) = l(Z)$ für alle X, Y, Z mit entsprechenden Größen. Ist insbesondere $l_j : (\mathscr{R}^d)_{nc} \to \mathscr{R}_{nc}$ die Projektion auf die j-te Koordinate, d.h.
$$l_j(X) = l_j(X_1, \dots, X_d) = X_j$$
dann gilt $\Delta_R l_j(X,Y)(Z) = Z_j$ und $\Delta_L l_j(X,Y)(Z) = Z_j$ für alle d-Tupel von Matritzen X, Y, Z über $\mathscr{R}$ mit entsprechender Größe.

4. Seien $f : \Omega \to \mathscr{N}_{nc}$, $g : \Omega \to \mathscr{O}_{nc}$ nichtkommutative Funktionen auf einer rechts bzw. links zulässigen Menge $\Omega \subseteq \mathscr{M}_{nc}$. Weiter nehmen wir an, dass wir ein links- und rechts-distributives Produkt auf $\mathscr{N} \times \mathscr{O}$, das mit Operationen von $\mathscr{R}$ kommutiert und Werte in einem $\mathscr{R}$-Modul $\mathscr{P}$ annimmt (etwa eine lineare Abbildung $\mathscr{N} \otimes_{\mathscr{R}} \mathscr{O} \to \mathscr{P}$) haben. Dieses können wir auf Matritzen über $\mathscr{N}$ und $\mathscr{O}$ erweitern. Dann ist $f \cdot g : \Omega \to \mathscr{P}_{nc}$ eine nichtkommutative Funktion und es gilt
$$\Delta_R(f \cdot g)(X,Y)(Z) = f(X) \cdot \Delta_R g(X,Y)(Z) + \Delta_R f(X,Y)(Z) \cdot g(Y)$$
$$\Delta_L(f \cdot g)(X,Y)(Z) = \Delta_L f(X,Y)(Z) \cdot g(X) + f(Y) \cdot \Delta_L g(X,Y)(Z)$$

5. Ist $f : \Omega \to \mathscr{A}_{nc}$ eine nichtkommutative Funktion und Ω eine rechts bzw. links zulässige nichtkommutative Menge, wobei $\mathscr{A}$ eine unitale Algebra über $\mathscr{R}$ ist. Wir definieren
$$\Omega^{inv} = \coprod_{n=1}^{\infty} \{X \in \Omega_n : f(X) \text{ ist invertierbar in } \mathscr{A}^{n\times n}\}$$

Dann ist Ω^{inv} eine rechts bzw. links zulässige nichtkommutative Menge und

$$\begin{aligned} f^{-1} : \Omega^{inv} &\to \mathscr{A}_{nc} \\ X &\mapsto f^{-1}(X) \end{aligned}$$

mit $f^{-1}(X) := f(X)^{-1}$ eine nichtkommutative Funktion. Weiter gilt dann

$$\Delta_R f^{-1}(X, Y)(Z) = -f(X)^{-1} \Delta_R f(X, Y)(Z) f(Y)^{-1}$$

bzw.f

$$\Delta_L f^{-1}(X, Y)(Z) = -f(Y)^{-1} \Delta_L f(X, Y)(Z) f(X)^{-1}$$

6. Seien $f : \Omega \to \mathscr{N}_{nc}$ und $g : \Lambda \to \mathscr{O}_{nc}$ für nichtkommutative rechts bzw. links zulässige Mengen $\Omega \subseteq \mathscr{M}_{nc}$, $\Lambda \subseteq \mathscr{N}_{nc}$ mit $f(\Omega) \subseteq \Lambda$, dann ist $g \circ f : \Omega \to \mathscr{O}_{nc}$ eine nichtkommutative Funktion und es gilt

$$\Delta_R(f \circ g)(X, Y)(Z) = \Delta_R g(f(X), f(Y))(\Delta_R f(X, Y)(Z))$$

bzw.

$$\Delta_L(f \circ g)(X, Y)(Z) = \Delta_L g(f(X), f(Y))(\Delta_L f(X, Y)(Z))$$

Proposition (Zusammenfassung 2.15 und 2.18)
Sei $f : \Omega \to \mathscr{N}_{nc}$ nichkommutative Funktion auf einer rechts bzw. links zulässigen Menge $\Omega \subseteq \mathscr{M}_{nc}$ dann gilt:

1.
$$\Delta_R f(X_1 \oplus X_2, Y)(\text{col } [Z_1, Z_2]) = \text{col } [\Delta_R f(X_1, Y)(Z_1), \Delta_R f(X_2, Y)(Z_2)]$$
für alle $n_1, n_2, m \in \mathbb{N}$, $X_1 \in \Omega_{n_1}$, $X_2 \in \Omega_{n_2}$, $Y \in \Omega_m$, $Z_1 \in \mathscr{M}^{n_1 \times m}$, $Z_2 \in \mathscr{M}^{n_2 \times m}$
$$\Delta_L f(X_1 \oplus X_2, Y)(\text{row } [Z_1, Z_2]) = \text{row } [\Delta_L f(X_1, Y)(Z_1), \Delta_L f(X_2, Y)(Z_2)]$$
für alle $n_1, n_2, m \in \mathbb{N}$, $X_1 \in \Omega_{n_1}$, $X_2 \in \Omega_{n_2}$,$Y \in \Omega_m$, $Z_1 \in \mathscr{M}^{m \times n_1}$, $Z_2 \in \mathscr{M}^{m \times n_2}$

2.
$$\Delta_R f(X, Y_1 \oplus Y_2)(\text{row } [Z_1, Z_2]) = \text{row } [\Delta_R f(X, Y_1)(Z_1), \Delta_R f(X, Y_2)(Z_2)]$$
für alle $m_1, m_2, n \in \mathbb{N}$, $Y_1 \in \Omega_{m_1}$, $Y_2 \in \Omega_{m_2}$, $X \in \Omega_n$, $Z_1 \in \mathscr{M}^{n \times m_1}$, $Z_2 \in \mathscr{M}^{n \times m_2}$
$$\Delta_L f(X, Y_1 \oplus Y_2)(\text{col } [Z_1, Z_2]) = \text{col } [\Delta_R f(X, Y_1)(Z_1), \Delta_R f(X, Y_2)(Z_2)]$$
für alle $m_1, m_2, n \in \mathbb{N}$, $Y_1 \in \Omega_{m_1}$, $Y_2 \in \Omega_{m_2}$, $X \in \Omega_n$,$Z_1 \in \mathscr{M}^{m_1 \times n}$, $Z_2 \in \mathscr{M}^{m_2 \times n}$

3.
$$\Delta_R f(TXT^{-1}, Y)(TZ) = T \Delta_R f(X, Y)(Z)$$
für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathscr{M}^{n \times m}$ und invertierbare $T \in \mathscr{R}^{n \times n}$ mit der Eigenschaft $TXT^{-1} \in \Omega_n$.
$$\Delta_L f(TXT^{-1}, Y)(TZ) = \Delta_L f(X, Y)(Z) T^{-1}$$
für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathscr{M}^{m \times n}$ und invertierbare $T \in \mathscr{R}^{n \times n}$ mit der Eigenschaft $TXT^{-1} \in \Omega_n$.

4.
$$\Delta_R f(X, SYS^{-1})(SZ) = \Delta_R f(X,Y)(Z)S^{-1}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathscr{M}^{n\times m}$ und invertierbare $S \in \mathscr{R}^{m\times m}$ mit der Eigenschaft $SYS^{-1} \in \Omega_m$.

$$\Delta_L f(X, SYS^{-1})(SZ) = S\Delta_L f(X,Y)(Z)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $X \in \Omega_n$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathscr{M}^{m\times n}$ und invertierbare $S \in \mathscr{R}^{m\times m}$ mit der Eigenschaft $SYS^{-1} \in \Omega_m$.

5.
$$TX = \tilde{X}T \quad \Longrightarrow \quad T\Delta_R f(X,Y)(Z) = \Delta_R f(\tilde{X},Y)(TZ)$$

für alle $n, \tilde{n}, m \in \mathbb{N}$,$X \in \Omega_n$, $\tilde{X} \in \Omega_{\tilde{n}}$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathscr{M}^{n\times m}$, $T \in \mathscr{R}^{\tilde{n}\times n}$;

$$XT = T\tilde{X} \quad \Longrightarrow \quad \Delta_L f(X,Y)(Z)T = \Delta_L f(\tilde{X},Y)(ZT)$$

für alle $n, \tilde{n}, m \in \mathbb{N}$,$X \in \Omega_n$, $\tilde{X} \in \Omega_{\tilde{n}}$, $Y \in \Omega_m$, $Z \in \mathscr{M}^{m\times n}$, $T \in \mathscr{R}^{n\times \tilde{n}}$;

6.
$$YS = S\tilde{Y} \quad \Longrightarrow \quad \Delta_R f(X,Y)(Z)S = \Delta_R f(X,\tilde{Y})(ZS)$$

für alle $n, m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$,$Y \in \Omega_m$, $\tilde{Y} \in \Omega_{\tilde{m}}$, $X \in \Omega_n$, $Z \in \mathscr{M}^{n\times m}$, $S \in \mathscr{R}^{m\times \tilde{m}}$;

$$SY = \tilde{Y}S \quad \Longrightarrow \quad S\Delta_L f(X,Y)(Z) = \Delta_R f(X,\tilde{Y})(SZ)$$

für alle $n, m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$,$Y \in \Omega_M$, $\tilde{Y} \in \Omega_{\tilde{m}}$, $X \in \Omega_n$, $Z \in \mathscr{M}^{m\times n}$, $T \in \mathscr{R}^{\tilde{m}\times m}$;