UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber
M.Sc. Tobias Mai

Seminar/Hauptseminar im Sommersemester 2014

Nichtkommutative Funktionentheorie (Free Analysis)

Handout zu Chapter 3:
Higher order nc functions and their difference-differential calculus

Es seien $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_k$ und $\mathcal{N}_0, \ldots, \mathcal{N}_k$ Moduln über dem unitalen kommutativen Ring $\mathcal{R}$ und $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,\mathrm{nc}}$, $j = 0, \ldots, k$, nichtkommutative Mengen.

Ist f eine Funktion auf $\Omega^{(0)} \times \cdots \times \Omega^{(k)}$ mit der Eigenschaft

$$f(\Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, \Omega^{(k)}_{n_k}) \subseteq \hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{N}_1^{n_0 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_k^{n_{k-1} \times n_k}, \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_k})$$

für alle $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, so sagen wir...

... f respektiert direkte Summen,

falls gilt

$(1X^0)$

$$f(X_0' \oplus X_0'', X_1, \ldots, X_k)(\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_1'' \end{bmatrix}, Z_2, \ldots, Z_k) = \begin{bmatrix} f(X_0', X_1, \ldots, X_k)(Z_1', Z_2, \ldots, Z_k) \\ f(X_0'', X_1, \ldots, X_k)(Z_1'', Z_2, \ldots, Z_k) \end{bmatrix}$$

$(1X^j)$

$$\begin{aligned} & f(X_0, \ldots, X_{j-1}, X_j' \oplus X_j'', X_{j+1}, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_{j-1}, \begin{bmatrix} Z_j' & Z_j'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z_{j+1}' \\ Z_{j+1}'' \end{bmatrix}, Z_{j+2}, \ldots, Z_k) \\ = \quad & f(X_0, \ldots, X_{j-1}, X_j', X_{j+1}, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_{j-1}, Z_j', Z_{j+1}', Z_{j+2}, \ldots, Z_k) \\ & + f(X_0, \ldots, X_{j-1}, X_j'', X_{j+1}, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_{j-1}, Z_j'', Z_{j+1}'', Z_{j+2}, \ldots, Z_k) \end{aligned}$$

$(1X^k)$

$$\begin{aligned} & f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k' \oplus X_k'')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, \begin{bmatrix} Z_k' & Z_k'' \end{bmatrix}) \\ = \quad & \begin{bmatrix} f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k') & f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k'')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k'') \end{bmatrix} \end{aligned}$$

... f respektiert Ähnlichkeiten,

falls gilt

$(2X^0)$

$$f(S_0X_0S_0^{-1}, X_1, \ldots, X_k)(S_0Z_1, Z_2, \ldots, Z_k) = S_0 f(X_0, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_k)$$

$(2X^j)$

$$\begin{aligned} & f(X_0, \ldots, X_{j-1}, S_jX_jS_j^{-1}, X_{j+1}, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_{j-1}, Z_jS_j^{-1}, S_jZ_{j+1}, Z_{j+2}, \ldots, Z_k) \\ = \ & f(X_0, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_k) \end{aligned}$$

$(2X^k)$

$$f(X_0, \ldots, X_{k-1}, S_kX_kS_k^{-1})(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_kS_k^{-1}) = f(X_0, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_k)S_k^{-1}$$

... f respektiert Intertwinings,

falls gilt

$(3X^0)$ Haben wir $T_0X_0 = \tilde{X}_0T_0$, so ist

$$T_0 f(X_0, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_k) = f(\tilde{X}_0, X_0, \ldots, X_k)(T_0Z_1, Z_2, \ldots, Z_k).$$

$(3X^j)$ Haben wir $T_jX_j = \tilde{X}_jT_j$, so ist

$$\begin{aligned} & f(X_0, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_{j-1}, \tilde{Z}_jT_j, Z_{j+1}, Z_{j+2}, \ldots, Z_k) \\ = \ & f(X_0, \ldots, X_{j-1}, \tilde{X}_j, X_{j+1}, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_{j-1}, \tilde{Z}_j, T_jZ_{j+1}, Z_{j+2}, \ldots, Z_k). \end{aligned}$$

$(3X^k)$ Haben wir $X_kT_k = T_k\tilde{X}_k$, so ist

$$f(X_0, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_k)T_k = f(X_0, \ldots, X_{k-1}, \tilde{X}_k)(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_kT_k).$$

Proposition (Proposition 3.2)**.**

(1) Die Bedingungen $(1X^0), \ldots, (1X^k)$ sind äquivalent zu

$$f(X_0' \oplus X_0'', \ldots, X_k' \oplus X_k'')(\begin{bmatrix} Z_1^{\prime,\prime} & Z_1^{\prime,\prime\prime} \\ Z_1^{\prime\prime,\prime} & Z_1^{\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} Z_k^{\prime,\prime} & Z_k^{\prime,\prime\prime} \\ Z_k^{\prime\prime,\prime} & Z_k^{\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} f^{\prime,\prime} & f^{\prime,\prime\prime} \\ f^{\prime\prime,\prime} & f^{\prime\prime,\prime\prime} \end{bmatrix},$$

wobei für $\alpha, \beta \in \{\prime, \prime\prime\}$

$$f^{\alpha,\beta} := \sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \{\prime, \prime\prime\}:\ \alpha_0 = \alpha, \alpha_k = \beta} f(X_0^{\alpha_0}, \ldots, X_k^{\alpha_k})(Z_1^{\alpha_0,\alpha_1}, \ldots, Z_k^{\alpha_{k-1},\alpha_k}).$$

(2) Die Bedingungen $(2X^0), \ldots, (2X^k)$ sind äquivalent zu

$$f(S_0X_0S_0^{-1}, \ldots, S_kX_kS_k^{-1})(S_0Z_1S_1^{-1}, \ldots, S_{k-1}Z_kS_k^{-1}) = S_0 f(X_0, \ldots, X_k)(Z_1, \ldots, Z_k)S_k^{-1}.$$

(3) Die Bedingungen $(3X^0), \ldots, (3X^k)$ sind äquivalent zu

$$T_0 f(X_0, \ldots, X_k)(Z_1T_1, \ldots, Z_kT_k) = f(\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_k)(T_0Z_1, \ldots, T_{k-1}Z_k)T_k,$$

wobei $T_jX_j = \tilde{X}_jT_j$ für $j = 0, \ldots, k$.