Nichtkommutative Funktionen höherer Ordnung (Chapter 3)

ZIEL: höhere Ableitungen

<u>klassische Analysis</u>: $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ ✓

↑ wieder Funktion

<u>n.k. Analysis</u>: Bereits für $n=1$ ist $\Delta^n_{R/L} f$ <u>keine</u> n.k. Funktion im Sinne von Chapter 2 mehr!

$\rightsquigarrow$ n.k. Funktionen höherer Ordnung

<u>Def.</u>: Seien für $k \in \mathbb{N}_0$

- $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_k, \mathcal{N}_0, \dots, \mathcal{N}_k$ $\mathcal{R}$-Moduln,
- $\Omega^{(j)} \subseteq \mathcal{M}_{j,nc}$, $j = 0, \dots, k$ n.k. Mengen.

Eine <u>n.k. Funktion k-ter Ordnung</u> ist eine Funktion f auf $\Omega^{(0)} \times \dots \times \Omega^{(k)}$ mit

k-lineare Abbildungen

$$(*) \quad f(\Omega^{(0)}_{n_0}, \dots, \Omega^{(k)}_{n_k}) \subseteq \hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{N}_1^{n_0 \times n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{N}_k^{n_{k-1} \times n_k}, \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_k}),$$

$\left(k=0: \ \hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_0}) \cong \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_0} \ ✓ \right)$

die (i) direkte Summen $(1X^0), \dots, (1X^k)$

(ii) Ähnlichkeiten $(2X^0), \dots, (2X^k)$

respektiert (vgl. Handout)

$\rightsquigarrow \mathcal{T}^k := \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \dots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc}, \dots, \mathcal{N}_{k,nc})$

Bem: Proposition 2.15 besagt:

$$f \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{nc}) \Rightarrow \Delta_R f \in \mathcal{T}^1(\Omega, \Omega; \mathcal{N}_{nc}, \mathcal{M}_{nc})$$

Bem: $\mathcal{N}^* := \hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{N}, \mathcal{R})$. Falls die Abbildung

$$\mathcal{N}_0^{n_0 \times n_0} \otimes \mathcal{N}_1^{* n_1 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_k^{* n_k \times n_k}$$

$$\longrightarrow \hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{N}_1^{n_0 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_k^{n_{k-1} \times n_k}, \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_k}) \text{ mit}$$

$$Y_0 \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k \longmapsto \Big((Z_1, \ldots, Z_k) \longmapsto \overbrace{Y_0 \underset{\in \mathcal{R}^{n_0 \times n_1}}{(Z_1 Y_1)} \cdots \underset{\in \mathcal{R}^{n_{k-1} \times n_k}}{(Z_k Y_k)}}^{\in \mathcal{R}^{n_0 \times n_k}} \Big)$$

ein Isomorphismus ist (etwa: $\mathcal{R}$ Körper und $\mathcal{N}_0, \ldots, \mathcal{N}_k$ endlichdim. VRe), dann können wir für $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc}, \ldots, \mathcal{N}_{k,nc})$

$$f(\Omega^{(0)}_{n_0}, \ldots, \Omega^{(k)}_{n_k}) \subseteq \mathcal{N}_0^{n_0 \times n_0} \otimes \mathcal{N}_1^{* n_1 \times n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_k^{* n_k \times n_k}$$

auffassen. Die definierenden Eigenschaften $(1X^0), \ldots, (1X^k)$ und $(2X^0), \ldots, (2X^k)$ entsprechen damit

$$\left.\begin{array}{l}\text{direkte Summen} \\ \text{Ähnlichkeiten}\end{array}\right\} \text{ im } j\text{-ten Argument von } f$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\text{direkte Summen} \\ \text{Ähnlichkeiten}\end{array}\right\} \text{ im } j\text{-ten Faktor von } f$$

Ferner: $\mathcal{T}^0(\Omega^{(0)}; \mathcal{N}_{0,nc}) \otimes \mathcal{T}^0(\Omega^{(1)}; \mathcal{N}^*_{1,nc}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}^0(\Omega^{(k)}; \mathcal{N}^*_{k,nc})$

$$\longrightarrow \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc}, \ldots, \mathcal{N}_{k,nc}) \text{ mit}$$

$f_0 \otimes \cdots \otimes f_k \longmapsto h$ für $h(X_0, \ldots, X_k) := f_0(X_0) \otimes f_1(X_1) \otimes \cdots \otimes f_k(X_k)$

Prop.: f Funktion auf $\Omega^{(0)} \times \cdots \times \Omega^{(k)}$ mit $(*)$.

$f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc}, \ldots, \mathcal{N}_{k,nc})$

$\Longleftrightarrow$ f respektiert Intertwinings $(3X^0), \ldots, (3X^k)$

(vgl. Handout)

Bem: $(1X^0), \ldots, (1X^k)$ bzw. $(2X^0), \ldots, (2X^k)$ bzw. $(3X^0), \ldots, (3X^k)$ erlauben eine äquivalente "kombinierte" Formulierung.

(vgl. Handout)

Prop. Sei $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)}, \ldots, \Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc}, \ldots, \mathcal{N}_{k,nc})$, $k \geq 1$. Dann:

$$f\left(X_0, \ldots, X_{k-1}, \begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}\right)\left(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, [\underset{\mathcal{N}_k^{n_{k-1} \times n_k'}}{\underset{\cap}{Z_k'}} \; \underset{\mathcal{N}_k^{n_{k-1} \times n_k''}}{\underset{\cap}{Z_k''}}]\right) = [A \;\; B]$$

mit
- $A = f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k')$
- $B = \Delta_R f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k', X_k'')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k', Z)$
  $\quad + f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k'')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k'')$

falls $\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix} \in \Omega^{(k)}_{n_k' + n_k''}$ für $Z \in \mathcal{M}_k^{n_k' \times n_k''}$. $(n_k = n_k' + n_k'')$

Hierdurch wird $\Delta_R f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k', X_k'')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k', Z)$ eindeutig bestimmt, ist unabhängig von Z_k'' und R-homogen bzgl. Z, soweit möglich.

Def: Falls $\Omega^{(k)}$ rechts-zulässig ist, definieren wir

$$\Delta_R f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k', X_k'')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k', Z)$$

unabhängig von r!

$$:= r^{-1} \Delta_R f(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_k', X_k'')(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k', rZ)$$

Beweis: (der Proposition)

- $\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_k'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_k'} \\ 0 \end{bmatrix} X_k'$ liefert wegen $(3X^k)$

$$A = f\left(X_0,\dots,X_{k-1},\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}\right)(Z_1,\dots,Z_{k-1},[Z_k'\ Z_k''])\begin{bmatrix} I_{n_k'} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= f(X_0,\dots,X_{k-1},X_k')(Z_1,\dots,Z_{k-1},Z_k').$$

- $X_k''\,[0\ I_{n_k''}] = [0\ I_{n_k''}]\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}$ liefert wegen $(3X^k)$

$$f(X_0,\dots,X_{k-1},X_k'')(Z_1,\dots,Z_{k-1},Z_k'')\ [0\ I_{n_k''}]$$

$$= f\left(X_0,\dots,X_{k-1},\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}\right)(Z_1,\dots,Z_{k-1},[0\ Z_k''])$$

$$= [A\ \ B] - f\left(X_0,\dots,X_{k-1},\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}\right)(Z_1,\dots,Z_{k-1},[Z_k'\ 0])$$

Multiplikation mit $\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_k''} \end{bmatrix}$ liefert die Formel für B mit

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta_R f(X_0,\dots,X_{k-1},X_k',X_k'')(Z_1,\dots,Z_{k-1},Z_k',Z) \\ &= f\left(X_0,\dots,X_{k-1},\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}\right)(Z_1,\dots,Z_{k-1},[Z_k'\ 0])\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_k''} \end{bmatrix}. \end{aligned}}$$

- $\begin{bmatrix} X_k' & rZ \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} rI_{n_k'} & 0 \\ 0 & I_{n_k''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rI_{n_k'} & 0 \\ 0 & I_{n_k''} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}$

liefert mit $(3X^k)$ nach einer kleinen Rechnung die behauptete R-Homogenität. $\square$

<u>Satz:</u> Sei $\Omega^{(k)}$ rechts-zulässig und sei $f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc},\dots,\mathcal{N}_{k,nc})$ gegeben. Dann ist

$$(Z_1,\dots,Z_{k+1}) \longmapsto \Delta_R f(X_0,\dots,X_{k+1})(Z_1,\dots,Z_{k+1})$$

$$\mathcal{N}_1^{n_0\times n_1}\times\cdots\times\mathcal{N}_k^{n_{k-1}\times n_k}\times\mathcal{M}_k^{n_k\times n_{k+1}} \longrightarrow \mathcal{N}_0^{n_0\times n_{k+1}}$$

$(k+1)$-linear über $\mathcal{R}$. Darüber hinaus gilt

$$\Delta_R f \in \mathcal{T}^{k+1}(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)},\Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc},\dots,\mathcal{N}_{k,nc},\mathcal{M}_{k,nc}).$$

<u>Bem:</u> Der Beweis verwendet, dass:

$$f \in \mathcal{T}^k(\Omega^{(0)},\dots,\Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc},\dots,\mathcal{N}_{k,nc})$$

$$\Longrightarrow \exists!\ \tilde f \in \mathcal{T}^k(\tilde\Omega^{(0)},\dots,\tilde\Omega^{(k)}; \mathcal{N}_{0,nc},\dots,\mathcal{N}_{k,nc}):$$

$$\tilde f|_{\Omega^{(0)}\times\cdots\times\Omega^{(k)}} = f$$

<u>Satz:</u> Sei $\Omega \subseteq \mathcal{M}_{nc}$ eine rechts-zulässige n.k. Menge. Für $f \in \mathcal{T}^0(\Omega; \mathcal{N}_{nc})$ gilt dann:

$$f\Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} X_0 & Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & X_{k-1} & Z_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X_k \end{bmatrix}}_{=:X}\Bigg)$$

$X_j \in \Omega_{n_j}$, $j = 0,\dots,k$

$Z_j \in \mathcal{M}^{n_{j-1}\times n_j}$, $j = 1,\dots,k$

mit $X \in \Omega_{n_0+\cdots+n_k}$

$$= \begin{bmatrix} f(X_0) & \Delta_R f(X_0,X_1)(Z_1) & \cdots & \Delta_R^k f(X_0,\dots,X_k)(Z_1,\dots,Z_k) \\ 0 & f(X_1) & \cdots & \Delta_R^{k-1} f(X_1,\dots,X_k)(Z_2,\dots,Z_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & f(X_k) \end{bmatrix}$$

Beweis: Induktion nach k, o.B.d.A. $\Omega = \tilde{\Omega}$

$k=0$: trivial **$k=1$:** klar nach Chapter 2

$k \longrightarrow k+1$:

$$X = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & X_{k-1} & [Z_k \;\; 0] \\ & 0 & \begin{bmatrix} X_k & Z_{k+1} \\ 0 & X_{k+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} f(X_0) & \cdots & \Delta_R^k f\left(X_0, \dots, X_{k-1}, \begin{bmatrix} X_k & Z_{k+1} \\ 0 & X_{k+1} \end{bmatrix}\right)(Z_1, \dots, Z_{k-1}, [Z_k 0]) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & f\left(\begin{bmatrix} X_k & Z_{k+1} \\ 0 & X_{k+1} \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

$\square$

Beispiel:

$$f(X) = X^m \implies \Delta_R f(X_0, X_1)(Z) = \sum_{i=1}^{m} X_0^{i-1} Z X_1^{m-i}$$

allgemein: $\Delta_R^k f(X_0, \dots, X_k)(Z_1, \dots, Z_k)$

$$= \sum_{\substack{0 \le i_0, \dots, i_k \le m-k \\ i_0 + \dots + i_k = m-k}} X_0^{i_0} Z_1 X_1^{i_1} Z_2 \cdots Z_k X_k^{i_k}$$

also $\Delta_R^k f(X_0, \dots, X_k)$

$$= \sum_{\substack{0 \le i_0, \dots, i_k \le m-k \\ i_0 + \dots + i_k = m-k}} X_0^{i_0} \otimes X_1^{i_1} \otimes \dots \otimes X_k^{i_k}$$

Beweis:

$$\Delta_R^k f\left(X_0, \dots, X_{k-1}, \begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}\right)\left(Z_1, \dots, Z_{k-1}, [Z_k' \; Z_k'']\right)$$

$$= \sum_{\substack{0 \le i_0, \dots, i_k \le m-k \\ i_0 + \dots + i_k = m-k}} X_0^{i_0} Z_1 X_1^{i_1} Z_2 \cdots [Z_k' \; Z_k''] \underbrace{\begin{bmatrix} X_k' & Z \\ 0 & X_k'' \end{bmatrix}^{i_k}}$$

$$= \begin{bmatrix} X_k'^{\,i_k} & \sum_{i_k' + i_k'' = i_k - 1} X_k'^{\,i_k'} Z X_k''^{\,i_k''} \\ 0 & X_k''^{\,i_k} \end{bmatrix}$$

$= [A \;\; B]$ mit $A = \Delta_R^k f(X_0, \dots, X_{k-1}, X_k')(Z_1, \dots, Z_{k-1}, Z_k')$,

$$B = \Delta_R^{k+1} f(X_0, \dots, X_{k-1}, X_k', X_k'')(Z_1, \dots, Z_{k-1}, Z_k'', Z) + \Delta_R^k f(X_0, \dots, X_{k-1}, X_k'')(Z_1, \dots, Z_{k-1}, Z_k'')$$

$\square$

Konkret: $f(X) = X^3$

$$f\left(\begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} X & Z\\ 0 & Y\end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} X & Z\\ 0 & Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^2 & XZ+ZY\\ 0 & Y^2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X^3 & X^2Z+XZY+ZY^2\\ 0 & Y^3\end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \quad \Delta_R f(X,Y)(Z) = X^2Z + XZY + ZY^2$

bzw. $\quad \Delta_R f(X,Y) = X^2\otimes 1 + X\otimes Y + 1\otimes Y^2$

Damit:

$$\Delta_R f\left(X_0, \begin{bmatrix} X_1' & Z\\ 0 & X_1''\end{bmatrix}\right)\left([Z_1' \;\; Z_1'']\right)$$

$$= X_0^2\,[Z_1' \;\; Z_1''] + X_0 \underbrace{[Z_1' \;\; Z_1'']\begin{bmatrix} X_1' & Z\\ 0 & X_1''\end{bmatrix}}_{=[Z_1'X_1' \;\;\; Z_1'Z+Z_1''X_1'']} + \overbrace{[Z_1' \;\; Z_1''] \underbrace{\begin{bmatrix} X_1' & Z\\ 0 & X_1''\end{bmatrix}^2}_{=\begin{bmatrix} X_1'^2 & X_1'Z+ZX_1''\\ 0 & X_1''^2\end{bmatrix}}}^{=[Z_1'X_1'^2 \;\;\; Z_1'X_1'Z+Z_1'ZX_1''+Z_1''X_1''^2]}$$

$= [A \;\; B] \quad$ mit

$$A = X_0^2 Z_1' + X_0 Z_1' X_1 + Z_1' X_1'^2 = \Delta_R f(X_0, X_1')(Z_1')$$

$$B = X_0 Z_1' Z + Z_1' X_1' Z + Z_1' Z X_1'' + X_0^2 Z_1'' + X_0 Z_1'' X_1'' + Z_1'' X_1''^2$$

$$= \Delta_R^2 f(X_0, X_1', X_1'')(Z_1', Z) \qquad + \Delta_R f(X_0, X_1'')(Z_1'')$$

$\Longrightarrow \quad \Delta_R^2 f(X_0, X_1', X_1'')(Z_1', Z) = X_0 Z_1' Z + Z_1' X_1' Z + Z_1' Z X_1''$

bzw. $\quad \Delta_R^2 f(X_0, X_1', X_1'') = X_0\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes X_1'\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes X_1''$