Seminar: Matrizen und Hilbert-Schmidt-Operatoren
Vortrag 3: Nina Becker 11.05.2017

Definition 1 *Es seien* $\{e_j\}$ *eine ONB für einen Hilbertraum* H *und* A *ein linearer, beschränkter Operator auf* H*. Dann lässt sich jedes* Ae_j *darstellen als* $Ae_j = \sum \alpha_{i,j} e_i$*. Die Einträge sind durch* $\alpha_{i,j} = \langle Ae_j, e_i \rangle$ *gegeben.*

Bemerkung 2 *Bei der Identifikation eines Operators mit einer Matrix gibt es folgende Übereinstimmungen:*
(i) Die Null-Abbildung ist die Null-Matrix und die Identitätsabbildung ist die Einheitsmatrix.
(ii) Multiplikation bzw. Addition zweier Operatoren entspricht Multiplikation bzw. Addition der entsprechenden Matrizen.
(iii) Der adjungierte Operator A^* *zu einem Operator* A *entspricht der komplexkonjugierten Matrix* $M_{A*} = \overline{M_A}$*.*

Satz 3 *Seien* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine ONB auf* $l^2(\mathbb{N})$ *und* $A \in L(l^2(\mathbb{N}))$ *mit den Matrixeinträgen* (α_{ij}) *und* $C = ||A||$*. Dann gilt:*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\alpha_{ij}^2| \leq C^2 \text{ und } \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_{ij}^2| \leq C^2. \tag{1}$$

Eine Matrix, die die Bedingungen erfüllt, ist nicht notwendigerweise ein stetiger Operator. Also im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall kann man Operatoren und Matrizen nicht einfach identifizieren.

Definition 4 *Ein Operator* A *heißt* ***Hilbert-Schmidt-Operator****, wenn gilt:*

$$||A||_{HS} := (\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{2}$$

Die Norm $||.||_{HS}$ *heißt* ***Hilbert-Schmidt-Norm****.*

Satz 5 *Erfüllt eine Matrix die Bedingung (2), so gibt es einen stetigen Operator* A *mit diesen Matrixkoeffizienten. Es gilt dann* $||A|| \leq ||A||_{HS}$*. Die Umkehrung gilt nicht.*

Satz 6 *Es seien* A, B, C, D *paarweise kommutative Operatoren des Hilbertraums* H*. Die Operatormatrix* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *ist genau dann invertierbar, wenn die Determinate* $AD - BC$ *invertierbar ist.*