Seminar: Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Vortrag 1: Hilberträume 27. 04. 2017

Die wichtigsten Begriffe für den heutigen Vortrag werden sein:

Definition (Skalarprodukt): Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{K}\\ (v,w) &\longmapsto \langle v,w\rangle,\end{aligned}$$

die folgende Eigenschaften für alle $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ erfüllt:

(S_1) $\langle v,v\rangle > 0 \,\forall\, v \in V$, $\langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

(S_2) $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$,

(S_3) $\langle \lambda v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$,

(S_4) $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$.

Ein Vektorraum V mit einem Skalarprodukt heißt *Prä-Hilbertraum*. Ist V mit der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm vollständig, so heißt V *Hilbertraum*.

Definition (Vom Skalarprodukt induzierte Norm): Es sei V ein Prä-Hilbertraum. Für alle $v \in V$ setzt man

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

und erhält dadurch eine Norm auf V, die *vom Skalarprodukt induzierte Norm*. Diese Norm macht Prä-Hilberträume zu speziellen normierten Räumen.

Definition (Orthogonalität): Es sei V ein Prä-Hilbertraum.

1. v, w in V heißen *orthogonal*, in Zeichen $v \perp w$, wenn $\langle v,w\rangle = 0$.
2. $M_1, M_2 \subset V$ heißen *orthogonal*, falls $m_1 \perp m_2$ für alle $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$.

Definition (Dichtheit, Separabilität): Sei X ein metrischer Raum.

1. $Y \subset X$ heißt *dicht* in X, falls für den Abschluss $\overline{Y}$ von Y gilt: $\overline{Y} = X$,
2. X heißt *separabel*, falls es eine abzählbare Teilmenge $Y \subset X$ gibt, so dass $\overline{Y} = X$ gilt.

Beispiel (ℓ_2-Raum, Hilbert'scher Folgenraum): Der *Hilbert'sche Folgenraum*

$$\ell_2 := \left\{\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ni (x_n) : \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\right\}$$

ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle (x_n),(y_n)\rangle := \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y}_n\right)$, unendlichdimensional und separabel.

Definition (Orthonormalbasis): Seien V ein Hilbertraum, I eine Indexmenge und $A = \{v_i \mid i \in I\} \subset V$ ein Orthonormalsystem, d. h. $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$. A heißt *Orthonormalbasis*, falls A total in V ist, d. h. die Menge der Linearkombinationen von Elementen aus A ist dicht in V.

Bemerkung: „Orthonormalbasen" sind keine Vektorraumbasen im Sinne der Linearen Algebra, weil für ihre lineare Hülle nur *Dichtheit*, nicht *Gleichheit* gefordert wird. Das angemessene Äquivalent zu Linearkombinationen sind *summierbare Familien* $(v_i)_{i \in I} \in V^I$ für die Indexmenge I, die die Orthonormalbasis indiziert.

Definition (Satz, Hilbertraumdimension): Seien V ein Hilbertraum, I eine beliebige Indexmenge und $A = \{v_i \mid i \in I\} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V. Dann heißt $\#(I)$ die *Hilbertraumdimension* von V. Jede andere Orthonormalbasis $J \subset V$ hat die selbe Kardinalität.