VORTRAG 6: DER UNILATERALE UND DER BILATERALE SHIFT

1. Die Spektren der Shiftoperatoren

Erinnerung 1.1. *Seien E,F normierte Räume und* $T \in L(E,F)$.
ii) *T heißt Isometrie* $:\Leftrightarrow \|Tx\| = \|x\| \ \forall x \in E \Leftrightarrow T^*T = id$
iii) *T heißt unitär* $:\Leftrightarrow$ *T Isometrie und surjektiv* $\Leftrightarrow T^*T = TT^* = id$

Definition 1.2 (Unilateraler Shift). *Der unilaterale Shift* $U : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ *ist definiert durch:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto U(a_n) = (0, a_0, a_1, \dots) = (a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}} \quad (a_{-1} := 0)$$

Bemerkung 1.3 & 1.4.
i) *Der unilaterale Shift U ist eine Isometrie auf* $l^2(\mathbb{N})$ *mit Norm* $\|U\| = 1$. *U ist <u>nicht</u> unitär.*
ii) *Für den zu U adjungierten Operator* U^* *gilt:*

$$U^*(a_n) = (a_1, a_2, \dots) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Definition 1.6 (Bilateraler Shift). *Der bilaterale Shift* $B : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ *ist definiert durch:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\dots, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, \dots) \mapsto B(a_n) = (\dots a_{-2}, \underline{a_{-1}}, a_0, \dots) = (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

Bemerkung 1.7 & 1.8.
i) *Der bilaterale Shift B ist eine Isometrie auf* $l^2(\mathbb{Z})$ *und es ist* $\|B\| = 1$. *B ist unitär.*
ii) *Der zu B adjungierte Operator* B^* *wirkt analog zu* U^*, *also:*

$$B^*(a_n) = (\dots, a_0, \underline{a_1}, a_2, \dots) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Notation 1.11. *Sei H ein Hilbertraum und* $T \in L(H)$.

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda id - T \text{ injektiv}, \ bild(\lambda id - T) \neq \overline{bild(\lambda id - T)} = H\}$$
$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda id - T \text{ injektiv}, \ \overline{bild(\lambda id - T)} \neq H\}$$

Lemma 1.12 (Spektrum des unilateralen Shifts).

$$\begin{array}{c|c|c|c} \sigma(U) = \overline{D_1(0)} & \sigma_p(U) = \varnothing & \sigma_c(U) = \partial D_1(0) & \sigma_r(U) = D_1(0)^{\circ} \\ \sigma(U^*) = \overline{D_1(0)} & \sigma_p(U^*) = D_1(0)^{\circ} & \sigma_c(U^*) = \partial D_1(0) & \sigma_r(U^*) = \varnothing \end{array}$$

Lemma 1.13 (Spektrum des bilateralen Shifts).

$$\begin{array}{c|c|c|c} \sigma(B) = \partial D_1(0) & \sigma_p(B) = \varnothing & \sigma_c(B) = \partial D_1(0) & \sigma_r(B) = \varnothing \\ \sigma(B^*) = \partial D_1(0) & \sigma_p(B^*) = \varnothing & \sigma_c(B^*) = \partial D_1(0) & \sigma_r(B^*) = \varnothing \end{array}$$

2. Die Wold-Zerlegung und wandernde Unterräume

Definition 2.1 (Wandernde Unterräume). *Seien H ein Hilbertraum und* $V : H \to H$ *eine Isometrie.*
i) $L \subseteq H$ *Untervektorraum heißt reduzierend für V* $:\Leftrightarrow VL \subseteq L$
ii) $L \subseteq H$ *Untervektorraum heißt wandernd unter V* $:\Leftrightarrow V^nL \perp L \ \forall n \in \mathbb{N}_*$

Definition 2.3 (Allgemeiner unilateraler Shift). *Sei* $V : H \to H$ *eine Isometrie auf einem Hilbertraum H.*
V heißt allgemeiner unilateraler Shift, wenn es einen wandernden Untervektorraum L gibt so, dass

$$M_+(L) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^nL = H \ .$$

Satz 2.4 (Wold-Zerlegung). *Sei* $V : H \to H$ *eine Isometrie. Dann kann H zerlegt werden in eine orthogonale Summe* $H = H_0 \oplus H_1$ *so, dass* H_0 *und* H_1 *jeweils V reduzieren,* $V\big|_{H_0}$ *unitär ist und* $V\big|_{H_1}$ *unilateral im Sinne von 2.3 ist.*

Definition 2.5 (Allgemeiner bilateraler Shift). *Seien* $T : H \to H$ *unitär und L ein wandernder Untervektorraum für T.*
T heißt allgemeiner bilateraler Shift, wenn gilt:

$$M_+(L) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} T^nL = H$$

Satz 2.6. *Jeder (im Sinne von 2.3) unilaterale Shift* $U : H \to H$ *kann zu einem (im Sinne von 2.5) bilateralen Shift* $B : K \to K$ *erweitert werden, wobei* $H \subseteq K$ *ein Untervektorraum des Hilbertraums K ist.*

Satz 2.7. *Jede Isometrie* $V : H \to H$ *kann zu einem unitären Operator* $U : K \to K$ *erweitert werden, wobei* $H \subseteq K$ *ein Untervektorraum des Hilbertraums K ist.*