Seminar: Lineare Operatoren auf dem Hilbertraum
Vortrag 4: Eigenwerte, das Spektrum und Positivität 18.05.17

Definition 1. *(i) Eine **Algebra** über $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, der zusätzlich eine $\mathbb{C}$-lineare, assoziative Multiplikation besitzt, mit $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in A$.*

*(ii) Eine **normierte Algebra** ist eine Algebra A, die ein normierter Vektorraum ist mit $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ für alle $x, y \in A$.*

*(iii) Eine **Banachalgebra** ist eine vollständige, normierte Algebra.*

Definition 2. *Sei A eine Banachalgebra mit 1 (z.B. $L(H)$), $x \in A$.*

*(i) $Spec(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda 1 - x$ ist nicht invertierbar$\}$,das **Spektrum von x**.*

*(ii) $\rho(x) := \mathbb{C} \setminus Spec(x)$, die **Resolventenmenge von x**.*

Definition 3. *Sei $T \in L(H)$.*

*(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** von T $:\Leftrightarrow$ Es existiert $0 \neq x \in H$, so dass $Tx = \lambda x$.*

*(ii) $\sigma_p(T) := \{\lambda | \lambda$ ist Eigenwert von $T\}$, das **Punktspektrum von T**.*

*(iii) $\Pi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} | T - \lambda 1$ ist nicht nach unten beschränkt$\}$, das **approximative Punktspektrum von T**.*

*(iv) $\Gamma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} | Bild(T - \lambda 1)$ liegt nicht dicht in $H\}$, das **stetige Spektrum von T**.*

Satz 4. *Sei A eine Banachalgebra mit 1, dann gilt für alle $x \in A$, $Spec(x)$ ist kompakt und nichtleer.*

Definition 5. *Sei $T \in L(H)$. $W(T) := \{\langle T\xi, \xi \rangle | \|\xi\| = 1\}$, der **numerische Wertebereich von** T.*

Satz 6. *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert ($T = T^*$), dann gilt $Spec(T) \subset \mathbb{R}$.*

Satz 7. *Ein Operator $T \in L(H)$ ist positiv (d.h. T ist selbstadjungiert und $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ für alle ξ) genau dann, wenn $Spec(T) \subset \mathbb{R}_0^+$.*

Satz 8. *Sei $T \in L(H)$ ein nilpotenter Operator (d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $T^n = 0$), dann gilt $Spec(T) = \{0\}$.*

Definition 9. *Ein Operator $T \in L(H)$ heißt **normal** $:\Leftrightarrow TT^* = T^*T$.*