Seminar zu Operatoren auf Hilberträumen, SoSe 2017
Vortrag 7: **Das Halbkreiselement** - *Alexander Mang*
[Nica, Alexandru / Speicher, Roland: Lectures on the Combinatorics of Free Probability, 2006, Lecture 1 und 2, Exercise 8.23.]

Definition 1: Ein $*$-*Wahrscheinlichkeitsraum* $(\mathcal{A}, \varphi)$ ist ein Paar aus einer $*$-Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{C}$ mit Eins und einer $\mathbb{C}$-Linearform φ mit $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = 1$ und $\varphi(x^* x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{A}$.

Definition 2: Der freie $\mathbb{C}$-Modul $\mathbb{C}\langle X, X^* \rangle$ über dem von den zwei Elementen X, X^* frei erzeugten Monoid ist mit der eindeutig durch $X \mapsto X^*$ gegebenen Involution eine $*$-Algebra über $\mathbb{C}$ mit Eins, die *nichtkommutativen Polynome in den Unbestimmten* X, X^*. Elemente $X^{\varepsilon(1)} \dots X^{\varepsilon(k)}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\varepsilon : \{1, \dots, k\} \to \{1, *\}$ heißen *nichtkommutative Monome.*

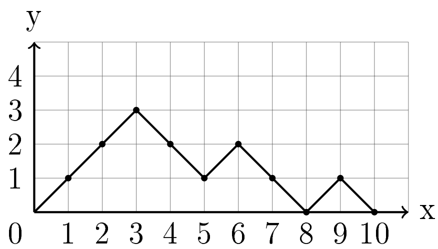
Definition 3: Im $*$-Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \varphi)$ ist die $*$-*Verteilung* μ *im algebraischen Sinne* eines Elements $a \in \mathcal{A}$ die eindeutig bestimmte $\mathbb{C}$-Linearform auf $\mathbb{C}\langle X, X^* \rangle$, welche $\mu(X^{\varepsilon(1)} \dots X^{\varepsilon(k)}) = \varphi(a^{\varepsilon(1)} \dots a^{\varepsilon(k)})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $\varepsilon : \{1, \dots, k\} \to \{1, *\}$ erfüllt. Man nennt die Skalare $\varphi(a^{\varepsilon(1)} \dots a^{\varepsilon(k)})$ die $*$-*Momente von* a.

Definition 4: Ist $a \in \mathcal{A}$ normal und existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ mit kompakten Träger und mit $\int_{\mathbb{C}} z^k \overline{z}^l \, \mu(dz) = \varphi(a^k (a^*)^l)$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ - welches dann hierdurch eindeutig bestimmt ist -, so heißt μ die $*$-*Verteilung von* a *im analytischen Sinne.*

Proposition 1: Ist $a \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert, lässt sich seine analytische $*$-Verteilung als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ auffassen, welches $\int_{\mathbb{R}} t^m \, \mu(dt) = \varphi(a^m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

Definition 5: Ein selbstadjungiertes Element $a \in \mathcal{A}$ heißt *zentriertes Halbkreiselement mit Radius* $r \in \mathbb{R}_{++}$, wenn seine $*$-Verteilung im analytischen Sinne absolutstetig bezüglich des Borel-Lebesguemaßes auf $[-r; r]$ ist und fast überall die Dichte $t \mapsto \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - t^2}$ hat.

Definition 6: Eine Abbildung $f : \{1, \dots, 2p\} \to \{-1, 1\}$ mit $\sum_{i=1}^{2p} f(i) = 0$ und $\sum_{i=1}^{j} f(i) \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq 2p$ heißt *Dyck-Pfad der Länge* $2p \in \mathbb{N}_0$. Die Menge Dyck_{2p} aller solchen steht in Bijektion zur Menge aller nichtkreuzenden Paarpartitionen von $\{1, \dots, 2p\}$.



Ein Dyck-Pfad der Länge 10.

Proposition 2: Die Mächtigkeit von Dyck_{2p} entspricht der *Catalan-Zahl* $C_p = \frac{1}{p+1}\binom{2p}{p}$. Mit $C_0 = C_1 = 1$ gilt $C_n = \sum_{j=1}^{n} C_{j-1} C_{n-j}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Satz: Für einen $*$-Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{A}, \varphi)$, der von einer *nicht-unitären Isometrie*, d.h. einem Element $a \in \mathcal{A}$ mit $a^* a = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \neq a a^*$, erzeugt wird, in dem die Menge $\{a^m (a^*)^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig ist, und der $\varphi(a^m (a^*)^n) = \delta_{m,0} \delta_{n,0}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt, gilt: Das selbstadjungierte Element $a + a^*$ ist ein zentriertes Halbkreiselement von Radius 2 und die - einzig nicht verschwindenden - $*$-Momente $\varphi\left((a + a^*)^{2p}\right)$ von $a + a^*$ entsprechen gerade der Anzahl C_p der Dyckpfade von Länge $2p \in \mathbb{N}_0$.