Projektionen auf Hilberträumen

Vortragender: Martin Michajlow, Seminar über Hilberträume, Vortrag 9
Sommersemester 2017, Universität des Saarlandes, Prof. Dr. Moritz Weber

---

Definition 1: Sei $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$ ein abgeschlossener Teilraum und für $z \in \mathscr{H}$ sei $z = x + y$ die eindeutige orthogonale Zerlegung bezüglich $\mathscr{K}$, wobei $x \in \mathscr{K}$ und $y \in \mathscr{K}^\perp$ gelte. Dann heißt die Abbildung $P : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, x + y \mapsto x$ die *orthogonale Projektion* von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{K}$.

Satz 2: *Im Fall von Definition 1 gilt:*
1. $P \in \mathcal{L}(\mathscr{H}), \|P\| = 1$, oder $P = 0$, *2. $P = P^2 = P^*$,*
3. $Im(P) = \mathscr{K}, ker(P) = \mathscr{K}^\perp$, *4. Sei $\tilde{P} \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, so dass $\tilde{P}^2 = \tilde{P} = \tilde{P}^*$. Dann existiert ein abgeschlossener Teilraum $\tilde{\mathscr{K}}$ von $\mathscr{H}$, so dass $\tilde{P}$ die orthogonale Projektion auf $\tilde{\mathscr{K}}$ im Sinne von Definition 1 ist.*

Definition 3: $\zeta(\mathscr{H}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathscr{H}); T = T^*\}, \mathscr{B}^+(\mathscr{H}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathscr{H}); T$ ist positiv, also $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathscr{H}\}$. Auf $\zeta(\mathscr{H})$ wird durch $T \leq S :\Leftrightarrow S - T \in \mathsf{B}^+(\mathscr{H})$ eine Ordnungsrelation definiert, die die Teilmenge der Projektionen zu einem Verband macht.

Satz 5: *Seien E, F orthogonale Projektionen von $\mathscr{H}$ auf die abgeschlossenen Teilräume Y beziehungsweise Z. Dann sind äquivalent:*
1. $Y \subseteq Z$, *2. $FE = E$,* *3. $EF = E$,*
4. $\|Ex\| \leq \|Fx\|$ für alle $x \in \mathscr{H}$, *5. $E \leq F$.*

Proposition 6: *Ist E die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum Y, dann ist $1 - E$ die orthogonale Projektion auf $Y^\perp$. Die Abbildung $E \mapsto 1 - E$ kehrt die Halbordnung $\leq$ um.*

Definition 7: Ist $(Y_a)_{a\in A}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilräumen von $\mathscr{H}$ mit zugehörigen Projektionen $(E_a)_{a\in A}$, dann ist $\wedge_{a\in A} Y_a := \cap_{a\in A} Y_a$ der größte abgeschlossene Teilraum von $\mathscr{H}$, der in allen Y_a enthalten ist und $\vee_{a\in A} Y_a := \overline{LH(\cup_{a\in A} Y_a)}$ der kleinste abgeschlossene Teilraum von $\mathscr{H}$, der alle Y_a enthält. Die zugehörigen Projektionen $\wedge_{a\in A} E_a, \vee_{a\in A} E_a$ heißen *Durchschnitt* oder *Infimum* beziehungsweise *Vereinigung* oder *Supremum* der $(E_a)_{a\in A}$.

Proposition 8: *Sei $(E_a)_{a\in A}$ eine Familie von orthogonalen Projektionen mit zugehörigen abgeschlossenen Teilräumen $(Y_a)_{a\in A}$. Dann gilt:*
1. $\vee_{a\in A}(1 - E_a) = 1 - \wedge_{a\in A} E_a$, *2. $\wedge_{a\in A}(1 - E_a) = 1 - \vee_{a\in A} E_a$,*
mit den entsprechenden Teilraumbeziehungen
1. $\vee_{a\in A} Y_a^\perp = (\wedge_{a\in A} Y_a)^\perp$, *2. $\wedge_{a\in A} Y_a^\perp = (\vee_{a\in A} Y_a)^\perp$.*

Proposition 9: *Seien E, F kommutierende Projektionen auf $\mathscr{H}$ bezüglich den abgeschlossenen Teilräumen Y, Z. Dann gilt:*
1. $E \vee F = E + F - EF$, *2. $E \wedge F = EF$,* *3. $Y \vee Z = Y + Z$. Insbesondere ist $Y + Z$ abgeschlossen. Des Weiteren gilt $EF = 0$ genau dann, falls $Y \perp Z$. In diesem Fall gilt $E \wedge F = E + F$.*

Satz 12: *Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende/absteigende Folge von Projektionen. Dann gilt $\vee_{n\in\mathbb{N}} E_n(x) = lim_{n\in\mathbb{N}} E_n(x)$ beziehungsweise $\wedge_{n\in\mathbb{N}}(x) = lim_{n\in\mathbb{N}} E_n(x)$.*

Proposition 13: *Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Projektionen auf $\mathscr{H}$ mit $E_n E_m = 0$ (was äquivalent ist zu $E_n(\mathscr{H}) \perp E_m(\mathscr{H})$) für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Dann gilt $\vee_{n\in\mathbb{N}} E_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n(x)$ für alle $x \in \mathscr{H}$. Insbesondere gilt $\vee_{n\in\mathbb{N}}(\mathscr{H}) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} E_n(\mathscr{H})$.*