Im gesamten Vortrag sei H ein seperabler Hilbertraum.

1.Definition

Ein linearer Operator $T : H \to H$ auf einem Hilbertraum H heißt *kompakt*, falls er eine und damit alle der folgenden quivalenten Charakterisierungen erfüllt:
1. Die Menge $\overline{TB_1(0)} \subset H$ ist kompakt.
2. $\overline{TB}$ ist kompakt für alle beschränkten Mengen $B \subset H$
3. Für alle beschränkten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.
Schreibe $K(H)$ für die Menge der kompakten Operatoren auf H.

2.Satz

$K(H)$ ist ein abgeschlossenes beidseitiges Ideal von $L(H)$.
Eine Menge heißt abgeschlossenes beidseitiges Ideal vom Vektorraum $L(H)$, wenn sie einen linearer Teilraum bildet, der unter Multiplikation mit beliebigen Vektoren aus $L(H)$ und unter Normbildung abgeschlossen ist.

3.Satz

Die kompakten Operatoren bilden den Normabschluss der Operatoren mit endlichem Rang, d.h. $K(H) = \overline{E(H)}$, wobei $E(H) = \{T \in L(H) | \dim(\mathrm{Im}(T)) < \infty\}$.

4.Satz

Ein Diagonaloperator $D = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist kompakt genau dann, wenn $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$.

5.Satz

Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt. Die Umkehrung ist falsch.
Gegenbeispiele:
Die folgenden Operatoren sind kompakt, aber nicht Hilbert-Schmidt-Operatoren.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

6.Lemma

Die Calkin-Algebra $Q(H) := L(H)/K(H)$ versehen mit der Quotientennorm
$\|a + K(H)\| = \mathrm{dist}(a, K(E))$ ist eine Banachalgebra-Algebra (und sogar eine C^*-Algebra).
Insbesondere ist für $T \in K(H)$ auch $T^* \in K(H)$.

7.Satz (Spektralsatz für kompakte Operatoren)

Sei $T \in K(H)$. Dann gilt:
a) $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$ oder $\lambda \in \sigma_p(T^*)$.
b) Ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, so ist $\lim_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 0$.
c) Jeder Punkt $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist isolierter Punkt der Menge $\sigma(T)$
d) Die Dimension der Eigenräume zu den isolierten Eigenwerten aus a) ist endlich.
e) $\sigma(T)$ ist höchstens abzählbar.
f) Ist dim(H)= ∞, so ist $0 \in \sigma(T)$.