

Definition: Ein *linearer Operator* zwischen zwei $\mathbb{K}$ -Vektorräumen $T : X \longrightarrow Y$ ist eine lineare Abbildung von X nach Y , d. h. es gilt:

- (i) $T(\lambda x) = \lambda T x \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- (ii) $T(x + y) = T x + T y \ \forall x, y \in X$

Definition: Ein linearer Operator $T : X \longrightarrow Y$ zwischen normierten Vektorräumen X und Y heißt *beschränkt*, falls es ein $K \geq 0$ gibt, sodass $\|T x\| \leq K \|x\| \ \forall x \in X$. Das kleinste solche K ist dann die *Norm* des Operators T .

Definition: Die Menge der beschränkten linearen Operatoren von X nach Y wird mit $L(X, Y)$ bezeichnet. Desweiteren bezeichnet man:

$$L(X) := L(X, X)$$

$$X' := L(X, \mathbb{C}) \text{ (der Dualraum von } X \text{)}$$

Definition/Proposition: Sei H ein Prä-Hilbertraum mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm. Dann gilt:

- (i) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.
(Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)
- (ii) Zu $y \in H$ definiert $f_y(x) := \langle x, y \rangle$ ein Element im Dualraum H' mit $\|f_y\| = \|y\|$

Erinnerung: (Korollar aus dem Riesz'schen Darstellungssatz) Sei H ein Hilbertraum. Zu $f \in H'$ existiert ein $y \in H$ mit $f = f_y$

Definition/Satz: Sind H und K Hilberträume, so hat jedes $T \in L(H, K)$ genau eine *Adjungierte* $T^* \in L(K, H)$ mit der Eigenschaft:

$$\langle T x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \ \forall x \in H \ y \in K$$

Definition: Eine Abbildung $T : E \longrightarrow F$ zwischen topologischen Vektorräumen E und F heißt *offen*, wenn $T U \subseteq F$ offen ist $\forall U \subseteq E$ offen.

Folgerung aus dem Satz von Baire: Seien E, F vollständige normierte Vektorräume und $T : E \longrightarrow F$ stetig und linear. Dann gilt: ist T bijektiv, so ist T^{-1} stetig.