Seminar: Matrizen und Hilbert-Schmidt-Operatoren
Vortrag 8: Der Fockraum 29.06.2017

Definition 1 *Sei H ein Hilbertraum. Dann ist*

$$\mathcal{F}(H) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n} = H^{\otimes 0} \oplus (H) \oplus (H \otimes H) \oplus (H \otimes H \otimes H) \oplus ...$$

der volle Fockraum von H.
Dabei ist $H^{\otimes 0}$ ein 1-dimensionaler Hilbertraum $\mathbb{C}\Omega$ mit Basis Ω.

Definition 2 *Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{F}(H)$ dessen Fockraum. Dann heißt die beschränkte lineare Funktion $\ell(\mathcal{E}) : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{F}(H)$ mit $\mathcal{E} \in H$ definiert durch*

$$\ell(\mathcal{E})\Omega = \mathcal{E}$$

$$\ell(\mathcal{E})\mathcal{E}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{E}_n = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{E}_n$$

der Erzeuger von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{F}(H)$.

Bemerkung 3 *Die Adjungierte $\ell(\mathcal{E})^*$ von $\ell(\mathcal{E})$ ist definiert durch*

$$\ell(\mathcal{E})^*\Omega = 0$$

$$\ell(\mathcal{E})\mathcal{E}_1 =< \mathcal{E}_1, \mathcal{E} > \Omega$$

$$\ell(\mathcal{E})^*\mathcal{E}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{E}_n =< \mathcal{E}_1, \mathcal{E} > \mathcal{E}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{E}_n$$

und heißt der Vernichter von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{F}(H)$.

Satz 4 *Sei $\tau_H : \mathcal{L}(\mathcal{F}(H)) \to \mathbb{R}, T \mapsto < T\Omega, \Omega >$ sodass $(\mathcal{L}(\mathcal{F}(H)), \tau_H)$ ein *-Wahrscheinlichkeitsraum ist, dann ist für jedes $\mathcal{E} \in H$ der Operator $\ell(\mathcal{E}) + \ell(\mathcal{E})^*$ ein zentriertes Halbkreiselement mit Radius $2||\mathcal{E}||$. Desweiteren ist für $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ orthonormal, der Operator $\ell(\mathcal{E}_1) + \ell(\mathcal{E}_1)^* + \ell(\mathcal{E}_2) + \ell(\mathcal{E}_2)^*$ ein zentriertes Halbkreiselement mit Radius $2\sqrt{2}$*

Definition 5 *Sei H ein Hilbertraum. Dann ist*

$$\mathcal{F}_-(H) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\wedge n} = H^{\wedge 0} \oplus (H) \oplus (H \wedge H) \oplus (H \wedge H \wedge H) \oplus ...$$

der antisymmetrische Fockraum von H. Dabei ist $H^{\wedge 0} = \mathbb{C}\Omega$ wieder ein 1-dimensionaler Hilbertraum mit Basis Ω.