Andreas Widenka
13. Juli 2017

Unbeschränkte Operatoren

Definition 1
Es sei H ein beliebiger Hilbertraum.

a) Ein *(nicht notwendig beschränkter) Operator* auf H ist eine lineare Abbildung $T : D(T) \to H$, wobei $D(T)$, der *Definitionsbereich von* T, ein linearer Teilraum von H ist. Gilt sogar $\overline{D(T)} = H$, so heißt T *dicht definiert*.

b) Ein Operator S heißt *Erweiterung von* T ($T \subset S$), falls $D(T) \subset D(S)$ gilt und $Sx = Tx$ für alle $x \in D(T)$ gilt.

c) Der Teilraum $G(T) := \{(x, Tx)|x \in D(T)\} \subset H \times H$ heißt der *Graph* von T. Ist $G(T)$ abgeschlossen, so heißt auch T abgeschlossen. Außerdem heißt T abschließbar, falls T eine abgeschlossene Erweiterung besitzt. In diesem Fall schreiben wir für die kleinste dieser Erweiterungen $\overline{T}$, der *Abschluss von* T.

Definition 2
Es sei H ein Hilbertraum und T ein dicht definierter Operator auf H.

a) Der lineare Teilraum $D(T^*) := \{y \in H|(x \mapsto < Tx, y >$ ist stetig auf $D(T)\}$ ist Definitionsbereich der Adjungierten von T.

b) Für jedes $y \in D(T^*)$ gibt es genau ein $T^*y \in H$, sodass $< Tx, y >=< x, T^*y >$ gilt für alle $x \in D(T)$. Dann heißt $T^* : D(T^*) \to H$ die *Adjungierte von* T.

Definition 3
Sei T dicht definiert. Dann heißt T

- *symmetrisch*, wenn $< Tx, y >=< x, Ty >$ für alle $x \in D(T)$ gilt.
- *maximal symmetrisch*, wenn T symmetrisch ist und keine echte symmetrische Erweiterung hat.

Definition 4
Sei T ein symmetrischer Operator. Definiere $U : Bild(T + i) \to Bild(T - i)$ durch $Tx + ix \mapsto Tx - ix$, bzw. $U := (T - i)(T + i)^{-1}$. Dann ist U eine Isometrie und heißt die *Cayley-Transformierte von* T.

Satz 5
Sei T ein dicht definierter, abgeschlossener und symmetrischer Operator. Setze

$$n_{\pm} := dim(Bild(T \pm i)^{\perp}).$$

Dann gilt:

- T ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow n_- = 0 = n_+$
- T ist maximal symmetrisch $\Leftrightarrow n_- = 0$ oder $n_+ = 0$
- T hat eine selbstadjungierte Erweiterung $\Leftrightarrow n_- = n_+$

Beispiel 6
Sei V der Rechtsshift auf ℓ^2. Dann ist V eine Isometrie und $I - V$ ist injektiv und bildet auf einen dichten Unterraum von H ab. Also ist V die Cayley-Transformierte eines symmetrischen, dicht definierten, abgeschlossenen Operators T. Da $D(V) = H$ und $dim(Bild(V)^{\perp}) = 1$ gilt, ist $n_+ = 0$ und $n_- = 1$. Also ist T maximal symmetrisch.