



Seminar zu Operatoren auf Hilberträumen
 Sommersemester 2017

20.4. — f.a.	25.5. — f.a. (Himmelfahrt)	29.6. — (8)
27.4. — (1)	1.6. — (5)	6.7. — (9)
4.5. — (2)	8.6. — (6)	13.7. — (10)
11.5. — (3)	15.6. — f.a. (Fronleichnam)	20.7. — (11)
18.5. — (4)	22.6. — (7)	27.7. — (12)

(Termine für Do 14-16, SR6)

Übersicht über die Vortragsthemen:

- (1) *Hilberträume*. [Friedrich Günther] Definition von Hilberträumen, Orthonormalbasen, Hilbertraum-Dimension vs. Vektorraumdimension, Beispiele von Hilberträumen (z.B. \mathbb{C}^n , $\ell^2(\mathbb{N})$), Zerlegung als direkte Summe, Fall $n = 2$
 [1, Kap. 1], [4, Kap. 2], [6, Kap. 12], [2, Kap. 1, 3 (z.B. Problem 5, 24, 25, 29)], [7, Kap. 5, Blatt 6 A1, Blatt 7 A1]
- (2) *Operatoren auf Hilberträumen*. [Julien Schanz] Definition von Operatoren auf Hilberträumen, Adjungierte, Operatornorm, endlich-dimensionaler vs. unendlich-dimensionaler Fall, invertierbare Operatoren
 [1, Kap. 1], [4, Kap. 2], [2, Kap. 5 (z.B. Pr. 39, 41)], [7, Kap. 6]
- (3) *Matrizen und Hilbert-Schmidt-Operatoren*. [Nina Becker] Operatoren als unendlich große Matrizen, Hilbert-Schmidt-Operatoren und -Norm, Matrizen mit operatorwertigen Einträgen
 [2, Kap. 4, 7 (z.B. Problem 36, 38, 55, 56, 57)], [7, Blatt 8 A3, Blatt 9 A1a,c]
- (4) *Eigenwerte, das Spektrum und Positivität*. [Steven Klein] Definition des Spektrums von Operatoren, Varianten des Spektrums, Eigenwerte, endlich-dimensionaler vs. unendlich-dimensionaler Fall, Spektrum kompakt und nichtleer, normale Operatoren, nilpotente Operatoren, Positivität
 [1, Kap. 1], [4, Kap. 2], [2, Kap. 8, 9 (z.B. Problem 61, 64, 65, 66, 80)], [7, Kap. 7, Blatt 9 A2b]
- (5) *Diagonal- und Multiplikations-Operatoren*. [Matias Klimpel] Diagonaloperatoren, deren Spektrum und Norm, Multiplikationsoperatoren, deren Spektrum und Norm, Beispiele von Diagonaloperatoren
 [2, Kap. 6, Kap. 9 (Problem 65, 66)] [7, Blatt 9 A2a]
- (6) *Der unilaterale und der bilaterale Shift*. [Kevin Kaub] Definition unilateraler und bilateraler Shift, Spektrum des unilateralen Shifts, Punktspektrum, Kommutante des Shifts, wandering subspaces und eine allgemeine Isometrie, Wurzel und Kommutante des Shifts, Wold-Zerlegung
 [2, Kap. 9, 14 (z.B. Pr. 67, 68, 70, 71, 113, 114, 115, 116)], [7, Blatt 10 A1]

- (7) *Das Halbkreiselement*. [Alexander Mang] Nicht-kommutative Wahrscheinlichkeitsräume und Verteilungen, Verteilung von $S + S^*$ für den einseitigen Shift S , Dyck-Pfade, nichtkreuzende Partitionen
[5, Lecture 1 und 2 und Exercise 8.23]
- (8) *Der Fockraum*. [Moritz Speicher] Definition voller Fockraum, Erzeuger und Vernichter, der unilaterale Shift hierin, Familie von Halbkreiselementen, symmetrischer und antisymmetrischer Fockraum, ggf. q -Fockraum
[5, Lecture 7], [4, Exercise 12.4.40]
- (9) *Projektionen*. [Martin Michajlow] Zusammenhang Projektion und Unterhilbertraum, Ordnung auf Projektionen, punktweise Konvergenz vs. Konvergenz in Norm, Zerlegung eines Hilbertraums in unendliche direkte Summen, invariante Teilräume und das Invariant-Subspaces-Problem, Infimum zweier Projektionen, zyklische Vektoren, die allgemeine Lage zweier Projektionen zueinander
[4, Kap. 2.5], [6, Kap. 12], [1, Kap. I.5], [2, z.B. Pr. 43, 96, 124, 125], [3], [7, Blatt 8 A2, Blatt 9 A3]
- (10) *Partielle Isometrien, Unitäre und die Polarzerlegung*. [Andreas Widenka] Unitäre Operatoren, Isometrien, partielle Isometrien, Polarzerlegung, Spektrum eines Unitären, einer partiellen Isometrie
[6, Kap. 12], [2, Kap. 13 (z.B. Pr. 98, 99, 101, 104, 105)], [7, Blatt 8 A1, Blatt 12 A1 und A3]
- (11) *Kompakte Operatoren*. [Vincent Preiß] Definition kompakter Operatoren, Diagonaloperatoren als kompakte Operatoren, kompakte Operatoren vs. Hilbert-Schmidt-Operatoren, kompakte Störungen von Unitären
[2, Kap. 15 (z.B. Pr. 132, 135, 136, 139, 140, 144)], [1, Kap. I.8], [7, Blatt 9 A1b, A2c]
- (12) *Toeplitz-Operatoren*. [Christina Pospisil] Toeplitz-Matrix, Produkt von Toeplitz-Operatoren, Spektrum, Zerlegung von Toeplitz-Operatoren
[2, Kap. 20], [6, Exercise 3.3.14 – 3.3.19]

Literatur

- [1] Blackadar, Operator algebras – Theory of C^* -Algebras and von Neumann Algebras, 2006.
- [2] Halmos, A Hilbert space problem book, 1967. (Alle Kapitel/Problem-Angaben zu Halmos' Buch beziehen sich auf die Ausgabe von 1967. In der Ausgabe von 1982 ist die Nummerierung anders!)
- [3] Halmos, *Two subspaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 381–389.
- [4] Kadison-Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras, 1983.
- [5] Nica-Speicher, Lectures on the Combinatorics of Free Probability, 2006.
- [6] Rudin, Functional analysis, 1990.
- [7] Skript und Übungen zur *Funktionalanalysis*, Moritz Weber, WiSe 2013/2014