



Seminar zu Operatoren auf Hilberträumen  
Wintersemester 2013/ 2014

Übersicht über die Vortragsthemen

---

- (1) *Grundlagen über Hilberträume und Beispiele.* Definition von Hilberträumen, Orthonormalbasen, Hilbertraum-Dimension vs. Vektorraumdimension, Beispiel von funktionalen oder analytischen Hilberträumen  
[1, Kap. 1], [3, Kap. 2], [5, Kap. 12], [2, Kap. 1, 3 (z.B. Problem 4, 5, 10, 24, 25, 29)]
- (2) *Beispiele von Operatoren auf Hilberträumen.* Definition von Operatoren auf Hilberträumen, Operatornorm, endlich-dimensionaler vs. unendlich-dimensionaler Fall, invertierbare Operatoren, Hilbertmatrix, Operatormatrizen  
[1, Kap. 1], [3, Kap. 2], [2, Kap. 4, 5, 7 (z.B. Pr. 36, 38, 39, 41)]
- (3) *Multiplikations-Operatoren.* Diagonaloperatoren, deren Spektrum und Norm, Multiplikationsoperatoren, deren Spektrum und Norm, Beispiele von Diagonaloperatoren  
[2, Kap. 6]
- (4) *Beispiele von Spektren von Operatoren.* Definition des Spektrums von Operatoren, endlich-dimensionaler vs. unendlich-dimensionaler Fall, normale Operatoren, nilpotente Operatoren  
[1, Kap. 1], [3, Kap. 2], [2, Kap. 8, 9 (z.B. Pr. 64, 65, 66, 80)]
- (5) *Schwache, starke und Normkonvergenz.* Die drei wichtigsten Topologien auf  $B(H)$ , Stetigkeit der Involution, der Norm und der Multiplikation  
[2, Kap. 11, 12]
- (6) *Der unilaterale und der bilaterale Shift.* Definition unilateraler und bilateraler Shift, Spektrum des unilateralen Shifts, Punktspektrum, Kommutante des Shifts, wandering subspaces und eine allgemeine Isometrie, Wurzel und Kommutante des Shifts  
[2, Kap. 9, 14 (z.B. Pr. 67, 68, 70, 71, 113, 114, 115, 116)]
- (7) *Das Halbkreiselement  $l + l^*$ .* nicht-kommutative Wahrscheinlichkeitsräume und Verteilungen, Verteilung von  $l + l^*$  für den einseitigen Shift  $l$ , Dyck-Pfade  
[4, Lecture 1 und 2]

- (8) *Projektionen*. Zusammenhang Projektion und Unterhilbertraum, Ordnung auf Projektionen, punktweise Konvergenz vs. Konvergenz in Norm, Zerlegung eines Hilbertraums in unendliche direkte Summen, invariante Teilräume und das Invariant-Subspaces-Problem, Infimum zweier Projektionen, zyklische Vektoren, evtl. die allgemeine Lage zweier Projektionen zueinander  
[3, Kap. 2.5], [5, Kap. 12], [1, Kap. I.5], [2, z.B. Pr. 43, 96, 124, 125]
- (9) *Partielle Isometrien und die Polarzerlegung*. Unitäre Operatoren, Isometrien, partielle Isometrien, Polarzerlegung, Spektrum eines Unitären, einer partiellen Isometrie  
[5, Kap. 12], [2, Kap. 13 (z.B. Pr. 98, 99, 101, 104, 105)]
- (10) *Kompakte Operatoren und Hilbert-Schmidt-Operatoren*. Definition kompakter Operatoren, Diagonaloperatoren als kompakte Operatoren, Hilbert-Schmidt-Norm, Zusammenhang zur Operatornorm, kompakte Operatoren vs. HS-Operatoren, kompakte Störungen von Unitären  
[2, Kap. 15 (z.B. Pr. 132, 135, 136, 139, 140, 144)], [1, Kap. I.8]
- (11) *Fredholm-Operatoren*. Fredholm-Operator und -Index, der Index und Invertierbarkeit, kompakte Störungen, Bsp. unilateraler Shift, Index von Produkten  
[1, Kap. I.8], [2, Kap. 15 (z.B. Pr. 140, 142)]
- (12) *Toeplitz-Operatoren*.  
[2, Kap. 20]
- (13) *Kommutatoren*. Kommutatoren von Operatoren, welche sind so schreibbar, Kommutator mit dem Adjungierten  
[2, Kap. 19 (z.B. Pr. 182, 187, 188)]

## Literatur

- [1] Blackadar, Operator algebras – theory of  $C^*$ -Algebras and von Neumann Algebras, 2006.
- [2] Halmos, A Hilbert space problem book, 1967.  
**Alle Kapitel/Problem-Angaben zu Halmos' Buch beziehen sich auf die Ausgabe von 1967. In der Ausgabe von 1982 ist die Nummerierung anders!**
- [3] Kadison-Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras, 1983.
- [4] Nica-Speicher, Lectures on the Combinatorics of Free Probability, 2006.
- [5] Rudin, Functional analysis, 1990.