UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Lese-Seminar zu Quantengruppen
Sommersemester 2016

Übersicht

Ziele:

- In welchem Sinne sind Gruppen die Symmetrien eines Raumes?
- Definition kompakte Quantengruppe und kompakte Matrixquantengruppe
- In welchem Sinne sind Quantengruppen die Symmetrien eines Quantenraumes?
- Existenz eines Haarzustandes auf Quantengruppen (= Möglichkeit zu integrieren)
- Darstellungstheorie
- Satz: Jede kompakte Matrixquantengruppe ist eine kompakte Quantengruppe
- Tannaka-Krein (= Quantengruppe eindeutig bestimmt durch Darstellungstheorie)
- Beispiele, ggf. easy Quantengruppen
- ggf. rein algebraische Varianten (Hopf-Algebren)

Quellen:

1. T. Timmermann, *An invitation to quantum groups and duality*, EMS, 2008.
2. S. Neshveyev, L. Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, SMF, 2013.
3. S.L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys.,1987.
4. S.L. Woronowicz, *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups*, Invent. Math., 1988.
5. M. Weber, *Lecture Notes aus Indien*, 2016.

0. Termin (Do, 21.4., 14 Uhr, SR9)

- Terminfindung abschließen
- Besprechen der Arbeitsweise/des Vorgehens für den ersten Termin, Verteilen der Schwerpunkte
- kleine konkrete Einführung von mir

1. Termin (Mi, 4.5., 14 Uhr, SR9)

- In welchem Sinne sind Gruppen die Symmetrien eines Raumes? Dazu:
  - Die Automorphismengruppe von n Punkten ist die symmetrische Gruppe S_n.

$$\mathrm{Aut}(\{x_1, \dots, x_n\}) = S_n$$

  - Die Gruppe aller Isometrien auf der Sphäre ist die orthogonale Gruppe O_n.

$$\{A : S^{n-1} \to S^{n-1} \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle\} = O_n, \quad S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 = 1\}$$

  - Die Automorphismengruppe des Würfels ist die hyperoktahedrale Gruppe H_n.

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(W_n) = H_n &:= \mathbb{Z}_2 \wr S_n := \mathbb{Z}_2^{\oplus n} \rtimes S_n \\ &:= \langle \sigma \in S_n, \tau_i, i = 1, \dots, n \mid \tau_i^2 = e, \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \sigma\tau_i\sigma^{-1} = \tau_{\sigma(i)} \rangle \end{aligned}$$

  - Die obigen drei Gruppen können als Matrixgruppen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} O_n &= \{a \in M_n(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = a_{ij}^*, \sum_k a_{ik}a_{jk} = \sum_j a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}\} \\ S_n &= \{a \in M_n(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = a_{ij}^* = a_{ij}^2, \sum_k a_{ik} = \sum_k a_{kj} = 1\} \\ H_n &= \{a \in M_n(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = a_{ij}^*, \sum_k a_{ik}^2 = \sum_k a_{kj}^2 = 1, a_{ik}a_{jk} = a_{ki}a_{kj} = 0, i \neq j\} \end{aligned}$$

- Definition kompakte Quantengruppe und kompakte Matrixquantengruppe. Dazu auch:
  - Ist G eine kompakte Gruppe, so ist $(C(G), \Delta)$ eine kompakte QG.
  - Ist (A, Δ) eine kompakte QG und ist A kommutativ, so ist $A = C(G)$ für eine kompakte Gruppe G.
  - Ist G diskret, so ist $(C^*(G), u_g \mapsto u_g \otimes u_g)$ eine kompakte QG.
  - Die Beispiele S_n^+, O_n^+ und H_n^+ sind kompakte Matrix-QGn.

Quellen: [1, Ch. 4, 5, 6][2, Ch. 1][5, Sect. 1][http://arxiv.org/abs/1201.4723]

2. Termin (Do, 19.5., 16 Uhr, SR10)

- Was ist eine Wirkung von Quantengruppen und warum verallgemeinert diese die Wirkung von Gruppen auf klassischen Räumen – in welchem Sinne sind Quantengruppen die Quantensymmetrien eines Quantenraumes? Dazu:
  - Definition: Wirkung einer kompakten Quantengruppe (von links und von rechts) auf einer C^*-Algebra. [1, 9.2.1][Sh. Wang, Quantum Symmetry Groups of Finite Spaces, 1998][5, 1.8]
  - Ist $A = C^*(x_1, \ldots, x_n) \subset A$ und G eine kompakte Matrixquantengruppe, vereinfacht sich die Wirkung. [Köstler-Speicher 2009, Def. 2.4]
  - Warum verallgemeinern diese Definition die Wirkung einer kompakten Gruppe bzw. einer kompakten Matrixgruppe? [5, 1.7]
  - Die Quantenautomorphismengruppe von n Quanten-Punkten ist S_n^+.

    n Quantenpunkte: $C^*(x_1, \ldots, x_n \mid x_i = x_i^* = x_i^2, \sum x_i = 1) = \mathcal{C}(\{x_1, \ldots, x_n\})$
  - O_n^+ wirkt auf der freien Sphäre.
    [http://arxiv.org/abs/1603.09192, Th. 5.7 vereinfachen]
  - ggf. Definition der ε-freien Sphäre und der Wirkung von O_n^ε darauf.
    [http://arxiv.org/abs/1603.09192, Sect. 4 und 5]
- Quantenuntergruppen und weitere Beispiele von Quantengruppen:
  - Definition Quantenuntergruppe für kompakte QG und kompakte MQG (warum sind die Definitionen konsistent?). [5, 1.11][http://arxiv.org/abs/1603.09192, nach Lemma 5.2]
  - Def. $O^+(Q), U^+(Q)$ [5,1.14, 1.15][1, Sect. 6.4][2, 1.1.6, 1.1.7]
  - Def. $SU_q(2)$ [5,1.16][1, Sect. 6.2][2, 1.1.5]
  - ggf. Definition O_n^ε, S_n^ε und T_n^ε. [http://arxiv.org/abs/1603.09192]

3. Termin (Do, 2.6., 16 Uhr, SR10) [verschoben auf:]

- Auf einer kompakten Quantengruppe existiert ein eindeutiger Haarzustand.

  [1, Sect. 5.1][2, 1.2][5. Sect. 2][Maes-VanDaele, Sect. 4][3, Sect. 4]
  - Definition Haarzustand [1, 5.1.4, 5.1.9] und das Haarmaß auf kompakten Gruppen ergibt einen Haarzustand mittels Integration [5, 2.1]
  - Eindeutigkeit: Sofern es einen Haarzustand auf einer CQG gibt, ist er eindeutig [5, in 2.2]
  - Ex.: Schritt 1 in [5, 2.2]
  - Ex.: Schritt 2 in [5, 2.2]
  - Ex.: Schritt 3 in [5, 2.2]
  - Der Haarzustand ist nicht immer treu [5, 2.3-2.6]

4. Termin (Do, 16.6., 16 Uhr, SR10)
5. Termin (Do, 7.7., 16 Uhr, SR10)
6. Termin (Do, 21.7., 16 Uhr, SR10)