UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Seminar zu Von-Neumann-Algebren
Sommersemester 2013

Übersicht über die Vortragsthemen

---

(1) *Bikommutantensatz von von Neumann.* Drei kanonische Topologien: Normtopologie, starke Operatortopologie, schwache Operatortopologie. Unterschiede und Gemeinsamkeiten. Kommutante M' und Bikommutante M''. Bikommutantensatz und Definition Von-Neumann-Algebra. Erste Eigenschaften von Von-Neumann-Algebren: messbarer Funktionalkalkül, die Rolle der unitären Elemente, Polarzerlegung. Kommutative Von-Neumann-Algebren.

[2], [4, Kap. 4], [3, Kap. 3]

(2) *Faktoren und Projektionen.* Definition Zentrum $M \cap M'$ und Faktor. Definition Murray-Von-Neumann-Äquivalenz von Projektionen $p \sim q$ und Ordnung $p \preceq q$. Äquivalenz $p \sim q \Leftrightarrow p \preceq q \preceq p$. Vergleichbarkeit von Projektionen und Teilen mit Rest in Faktoren.

[2], [3, Kap. 3, 6], [1, Kap. III.1]

(3) *Typen von Faktoren.* Definition minimale sowie endliche Projektion. Unterteilung der Faktoren in Typ I, II, III nach Existenz von minimalen und endlichen Projektionen. Fundamentalfolgen in Typ II. Existenz einer Dimensionsfunktion und Verfeinerung Typ I_n, I_∞, II_1, II_∞. Existenz einer Spur in Typ II_1.

[2], [3, Kap. 4,6], [1, Kap. III.1]

(4) *Der hyperfinite Faktor.* Definition eines hyperfiniten Faktors. Eindeutigkeit des hyperfiniten Faktors.

[3, Kap. 15], [1, Kap. III.3]

(5) *Gruppenfaktoren.* Assoziiere Von-Neumann-Algebren LG zu Gruppen G. Wann sind diese Faktoren. icc Gruppen. Property Γ. Typ II.

[3, Kap. 3]

(6) *Der freie Gruppenfaktor.* Spezialfall $G = \mathbb{F}_n$. Ungelöstes Problem der Abhängigkeit $L\mathbb{F}_n$ von n. $L\mathbb{F}_n$ nicht Property Γ. $L\mathbb{F}_n$ nicht hyperfinit. Evtl. amenable Gruppen und ihre Gruppenfaktoren. Evtl. Faktoren von McDuff (überabzählbar viele II_1-Faktoren)

[3, Kap. 3, 16]

(7) *Verschränkte Produkte.* Wirkungen von Gruppen auf Von-Neumann-Algebren und Definition von verschränkten Produkten $M \rtimes_\alpha G$. Freie, ergodische Wirkungen (dann $M \rtimes_\alpha G$ Faktor). Der Fall $M = L^\infty(X, \mu)$ und maßerhaltende Wirkungen (Fall II_1). Cartan-Unteralgebren

[3, Kap. 11]

(8) *Die Freie Wahrscheinlichkeit und das Faktorenproblem.* Interpolierte Gruppenfaktoren. Fundamentalgruppe. Dichotomie (entweder alle freien Gruppenfaktoren isomorph oder alle nicht-isomorph). $L\mathbb{F}_n$ hat keine Cartan-Unteralgebra, ist also kein verschränktes Produkt-

[1, Kap. III.3]

(9) *Unterfaktoren.* Index $[M : N]$ für $N \subseteq M$ II_1-Faktoren. Türme von II_1-Faktoren.

[3, Kap. 19], [1, Kap. III.2]

(10) *Typ III_λ.* Treue Zustände auf Von-Neuman-Algebren und Klassifizierung von Connes-VanDaele.

[3, Kap. 14, 15] , [1, Kap. III.4]

Literatur

[1] Bruce Blackadar, *Operator algebras. Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*, Mathematical Sciences, 122, Operator Algebras and Non-commutative Geometry III, Springer, 2006.

[2] Skript von Joachim Cuntz, 2005.

[3] Lecture Notes von Vaughan Jones, 2009,

`http://math.berkeley.edu/~vfr/MATH20909/VonNeumann2009.pdf`

[4] Gerard Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, 1990.