UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie
Wintersemester 2013/2014

Blatt 1

Abgabe: Aufgabe 1 wird am 23.10 als Präsenzübung besprochen;
Abgabe von Aufgabe 2 und 3 bis Donnerstag, 24.10., in der Vorlesung

---

Aufgabe 1.
Informieren Sie sich über die Cauchy-Transformierte und die Hilbert-Transformierte und einige ihrer wesentlichen Eigenschaften. Zeigen Sie insbesondere: Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$ ist die Cauchy-Transformierte

$$G(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} d\mu(x)$$

wohldefiniert auf $\mathbb{C}^+$ und dort eine analytische Funktion. Schreiben Sie G, für den Fall von μ mit kompaktem Träger, als Potenzreihe um Unendlich und identifizieren Sie die Koeffizienten. Finden Sie präzise Aussagen für den Zusammenhang zwischen Cauchy-Transformierte und Hilbert-Transformierte. Berechnen Sie die Cauchy-Transformierte und die Hilbert-Transformierte für die Halbkreisverteilung mit Dichte

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} \quad \text{auf} \quad [-2,2].$$

Aufgabe 2.
Lösen Sie folgende Extremwertprobleme: Finden Sie jeweils das Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$ mit vorgegebenem zweiten Moment $\int x^2 d\mu(x) = 1$ und

- maximaler klassischer Entropie $S(\mu)$
- minimaler klassischer Fisher Information $I(\mu)$
- maximaler freier Entropie $\chi(\mu)$
- minimaler freier Fisher Information $\Phi(\mu)$

Aufgabe 3.
Hier behandeln wir eine diskrete Version von Boltzmanns Formel $S = k \log W$,

$$\text{Entropie(Makrozustand)} \sim \log(\#\text{Mikrozustände})$$

und wollen sehen, dass diese uns die bekanne Formel für die Entropie liefert.

bitte wenden

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $N_1, \dots, N_k \in \mathbb{N}$. Setze $N := N_1 + \dots + N_k$. Betrachte nun folgenden Makrozustand: Wir haben k Urnen und N Bälle, von denen N_i viele in der i-ten Urne liegen ($i = 1, \dots, k$). Ein Mikrozustand ist gegeben durch N durchnummerierte Bälle, die auf die Urnen verteilt sind. Bezeichne $\Lambda(N_1, \dots, N_k)$ die Menge aller Mikrozustände, die unseren Makrozustand realisieren. (Der Übergang von Mikrozustand zu Makrozustand besteht also darin, dass wir die Nummern der Bälle vergessen und uns nur dafür interessieren, wieviele Bälle in den Urnen liegen, nicht aber welche.) Wir betrachten nun den Grenzwert, dass alle $N_1, \dots, N_k$ gegen Unendlich gehen, so dass ihre relative Häufigkeit gegen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1, \dots, p_k)$ (d.h., $p_i \geq 0$ mit $p_1 + \dots + p_k = 1$) konvergiert:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N} = p_i.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log\bigl(\#\Lambda(N_1, \dots, N_k)\bigr) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i$$

Das Grab von Boltzmann