UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie
Wintersemester 2013/2014

Blatt 3
Abgabe: Donnerstag, 7.11., in der Vorlesung

Wie üblich bezeichne $\mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}$ den reellen Vektorraum der selbstadjungierten $N \times N$ Matrizen über $\mathbb{C}$. In Bemerkung 3.3 der Vorlesung haben wir den Vektorraum $\mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}$ mit $\mathbb{R}^{N^2}$ identifiziert, indem wir für $\mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}$ die $\mathbb{R}$-Basis (mit $e_{kl} := (\delta_{k,r}\delta_{l,s})_{r,s=1}^N$ für $k,l = 1,\dots,N$)

$$\{e_{kk} |\ k = 1,\dots,N\} \cup \Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{kl}+e_{lk}) \Big|\ 1 \leq k < l \leq N\Big\} \cup \Big\{\frac{i}{\sqrt{2}}(e_{kl}-e_{lk}) \Big|\ 1 \leq k < l \leq N\Big\}$$

gewählt haben. Unter dieser Identifikation konnten wir auf $\mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}$ das Lebesgue-Maß

$$d\Lambda(A) = 2^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{k=1}^N da_{kk} \prod_{1\leq k<l\leq N} d\,\mathrm{Re}(a_{kl})\, d\,\mathrm{Im}(a_{kl}), \qquad A = (a_{kl})_{k,l=1}^N \in \mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}$$

als Bildmaß des Lebesgue-Maßes λ^{N^2} auf $\mathbb{R}^{N^2}$ einführen.

Sei nun $\mathbb{R}^N_{\leq} := \{(\lambda_1,\dots,\lambda_N) \in \mathbb{R}^N |\ \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N\}$. Wir bezeichnen mit $\Phi : \mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}} \to \mathbb{R}^N_{\leq}$ die Abbildung, die $A \in \mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}$ das N-Tupel seiner geordneten Eigenwerte $(\lambda_1,\dots,\lambda_N) \in \mathbb{R}^N_{\leq}$ zuordnet. In der Vorlesung (Satz 4.1) haben wir gesehen, dass das Bildmaß $\Phi(\Lambda)$ des Lebesgue-Maßes Λ unter der Abbildung Φ von der Form

$$d\Phi(\Lambda)(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = C_N \prod_{1\leq k<l\leq N} (\lambda_k-\lambda_l)^2\, d\lambda_1 \dots d\lambda_N$$

ist. Ziel dieses Aufgabenblattes ist die Bestimmung der Normierungskonstanten C_N.

Aufgabe 1. Auf $\mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}$ betrachten wir das Maß μ, welches gegeben ist durch

$$d\mu(A) = \frac{1}{(2\pi)^{N^2/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^2)\Big)\, d\Lambda(A), \qquad A \in \mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}.$$

Hierbei bezeichnet Tr die *nicht* normalisierte Spur auf den $N \times N$ Matrizen über $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{M}_N^{\mathrm{sa}}$ darstellt.

(b) Beweisen Sie, dass das Bildmaß $\Phi(\mu)$ auf $\mathbb{R}^N_{\leq}$ gegeben ist durch

$$d\Phi(\mu)(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = \frac{C_N}{(2\pi)^{N^2/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \lambda_k^2\Big) \prod_{1\leq k<l\leq N} (\lambda_k-\lambda_l)^2\, d\lambda_1 \dots d\lambda_N.$$

bitte wenden

Aufgabe 2. Sei ν das durch $d\nu(x) = \exp(-x^2)\,dx$ bestimmte Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt

$$H_n(x) := (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$$

ein Polynom n-ten Grades. Die hierdurch gegebenen *Hermite-Polynome* H_n erfüllen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \\ H'_{n+1}(x) &= 2(n+1)H_n(x). \end{aligned}$$

(b) Der führende Koeffizient des Polynoms $P_n := \frac{1}{2^n} H_n$ ist 1 und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)\,d\nu(x) = \begin{cases} 2^{-n} n! \sqrt{\pi}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

(c) Für alle $\rho_1, \dots, \rho_N \in \mathbb{R}$ gilt

$$\prod_{1 \le k < l \le N} (\rho_k - \rho_l) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \rho_1 & \dots & \rho_N \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_1^{N-1} & \dots & \rho_N^{N-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} P_0(\rho_1) & \dots & P_0(\rho_N) \\ P_1(\rho_1) & \dots & P_1(\rho_N) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{N-1}(\rho_1) & \dots & P_{N-1}(\rho_N) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.

(a) Es bezeichne S_N die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, N\}$. Für eine Permutation $\pi \in S_N$ und eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^N$ setzen wir

$$\pi(X) := \{(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(N)}) |\ (x_1, \dots, x_N) \in X\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{\pi \in S_N} \pi(\mathbb{R}^N_{\le}),$$

und begründen Sie, dass $\pi_1(\mathbb{R}^N_{\le}) \cap \pi_2(\mathbb{R}^N_{\le}) \subset \mathbb{R}^N$ für $\pi_1, \pi_2 \in S_N$ mit $\pi_1 \neq \pi_2$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

(b) Folgern Sie mit Aufgabenteil (a) und Aufgabe 1, dass

$$\frac{C_N}{N!(2\pi)^{N^2/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \lambda_k^2\Big) \prod_{1 \le k < l \le N} (\lambda_k - \lambda_l)^2\, d\lambda_1 \dots d\lambda_N = 1.$$

(c) Verwenden Sie die Resultate aus Aufgabe 2, um das Integral in (b) noch auf einem anderen Weg zu berechnen. Folgern Sie damit

$$C_N = \frac{(2\pi)^{\frac{N(N-1)}{2}}}{1!2! \cdots (N-1)!}.$$

Hinweis: Wenden Sie die Leibniz-Formel auf die Determinante in Aufgabe 2 (c) an.