UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie

Wintersemester 2013/2014

Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 14.11., in der Vorlesung

Wie in der Vorlesung definieren wir

- die *Tschebyscheff-Polynome erster Art* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch die Bedingung
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \qquad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R},$$
- die *Tschebyscheff Polynome zweiter Art* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch die Bedingung
$$\sin(\theta)U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta) \qquad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Die Tschebyscheff-Polynome erster bzw. zweiter Art genügen der Rekursion
$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x), \qquad n \in \mathbb{N}$$
mit den Startwerten $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ bzw. $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = 2x$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x)$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $T_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x))$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ haben wir
$$\frac{U_n(x) - U_n(y)}{x - y} = 2\sum_{k=0}^{n-1} U_k(x)U_{n-1-k}(y).$$

(e) Für alle $x \in [-1, 1]$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt
$$\frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)z^n \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)z^n.$$

bitte wenden

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheffpolynome erster Art auf $[-1, 1]$ orthogonal sind bezüglich der *arcsin-Verteilung*

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, 1_{[-1,1]}(x) \, dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheffpolynome zweiter Art auf $[-1, 1]$ orthogonal sind bezüglich der *Halbkreisverteilung*

$$d\nu(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \, 1_{[-1,1]}(x) \, dx.$$

(c) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} T_n(x)^2 \, d\mu(x) \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}} U_n(x)^2 \, d\nu(x).$$

Aufgabe 3. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für die logarithmische Energie $\Sigma(\mu)$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $[-2, 2]$ die folgende bemerkenswerte Formel gilt:

$$\Sigma(\mu) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \log |x-y| \, d\mu(x) \, d\mu(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \left(\int_{\mathbb{R}} T_n\left(\frac{x}{2}\right) d\mu(x) \right)^2$$

(a) Berechnen Sie $\Sigma(\nu_r)$ für die skalierten Halbkreisverteilungen ν_r mit $r > 0$, die gegeben sind durch

$$d\nu_r(x) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2} \, 1_{[-r,r]}(x) \, dx.$$

(b) Finden Sie unter allen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $[-2, 2]$ das (eindeutig bestimmte) Maß, das die freie Entropie χ maximiert.