UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie
Wintersemester 2013/2014

Blatt 5
Abgabe: Donnerstag, 21.11., in der Vorlesung

Aufgabe 1. Es bezeichne $\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ den reellen Vektorraum der $m \times m$-Matrizen über $\mathbb{R}$, den wir mit der durch $\|A\|_2 := \mathrm{Tr}(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ definierten Norm $\|\cdot\|_2$ versehen.

(a) Begründen Sie, dass eine Abbildung $f : \mathrm{M}_m(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ genau dann Fréchet-differenzierbar ist, wenn die unter der Identifikation $\mathrm{M}_m(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m^2}$ induzierte Abbildung $f : \mathbb{R}^{m^2} \to \mathbb{R}^{m^2}$ (im Sinne der Analysis II) total differenzierbar ist.

Erinnerung. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und sei $U \subseteq X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt *Fréchet-differenzierbar an einer Stelle* $x_0 \in U$, falls es einen stetigen linearen Operator $df(x_0) : X \to Y$ gibt mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_X} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)h\|_Y = 0.$$

Wenn f Fréchet-differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in U$ ist, dann heißt f *Fréchet-differenzierbar auf* U.

(b) Zeigen Sie, dass der Vektorraum $B(\mathrm{M}_m(\mathbb{R}))$ aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ in sich isomorph ist zum algebraischen Tensorprodukt $\mathrm{M}_m(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \ \mathrm{M}_m(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_m(\mathbb{R}), \ A \mapsto A^n$$

auf $\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ Fréchet-differenzierbar ist mit

$$df(A)B = \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} B A^{n-k} \qquad \text{für alle } A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie weiter, dass $df(A)$ für $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ unter der in Aufgabenteil (b) gefundenen Identifikation $B(\mathrm{M}_m(\mathbb{R})) \cong \mathrm{M}_m(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ gegeben ist durch

$$df(A) = \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} \otimes A^{n-k}.$$

bitte wenden

Aufgabe 2. Wie in der Vorlesung bezeichne $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ die komplexe unitale Algebra aller Polynome in n nicht-kommutierenden Variablen $X_1, \ldots, X_n$.

Zeigen Sie: Die partiellen nicht-kommutativen Ableitungen

$$\partial_j : \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle \to \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle \otimes \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

erfüllen für alle $1 \leq j, k \leq n$

$$(\partial_k \otimes \mathrm{id}) \circ \partial_j = (\mathrm{id} \otimes \partial_j) \circ \partial_k.$$

Aufgabe 3. Sei (M, τ) ein W^*-Wahrscheinlichkeitsraum mit Spur und seien $X_1, \ldots, X_n \in M$ selbstadjungiert.

(a) Zeigen Sie: Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\Phi^*(\lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \frac{1}{\lambda^2} \Phi^*(X_1, \ldots, X_n).$$

(b) Sei nun $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine reelle invertierbare $n \times n$-Matrix und setze

$$Y_i := \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j.$$

Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen einem konjugierten System von den X_i und einem konjugierten System von den Y_i. Schließen Sie daraus:

(i) Ist A orthogonal, dann gilt:

$$\Phi^*(X_1, \ldots, X_n) = \Phi^*(Y_1, \ldots, Y_n).$$

(ii) Für allgemeines A gilt:

$$\frac{1}{\|A\|^2} \Phi^*(Y_1, \ldots, Y_n) \leq \Phi^*(X_1, \ldots, X_n) \leq \|A\|^2 \Phi^*(Y_1, \ldots, Y_n).$$

Aufgabe 4. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und sei $\mu \otimes \mu$ das zugehörige Produktmaß auf $\mathbb{R}^2$. Auf $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ betrachten wir den unbeschränkten Operator

$$\partial : \ L^2(\mathbb{R}, \mu) \supset D(\partial) \to L^2(\mathbb{R}^2, \mu \otimes \mu),$$

dessen Definitionsbereich $D(\partial)$ der Vektorraum aller Polynome auf $\mathbb{R}$ ist (d.h. ∂ ist insbesondere dicht definiert) und der dort bestimmt wird durch

$$(\partial P)(s,t) := \begin{cases} \dfrac{P(s) - P(t)}{s - t}, & \text{falls } s \neq t \\ P'(s), & \text{falls } s = t \end{cases} \qquad \text{für } P \in D(\partial) \text{ und } s, t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass der Operator ∂ genau dann abschließbar ist, wenn μ keine Atome besitzt (d.h. wenn $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt).

Hinweis: Betrachten Sie Polynome der Form $P_n(t) = (r^2 - (t - a)^2)^n$ mit $r > 0$ und $a \in \mathbb{R}$, falls μ Atome hat.